

BIBLIOTECA UTILE

GEOMETRIA POPOLARE

DI

C. L. LITTROW

TRADUZIONE DAL TEDESCO CON NOTE

DI

DAVIDE BESSO

CON 134 INCISIONI



MILANO
F. TREVES, EDITORE
1869

BIBLIOTECA UTILE

(101)

GEOMETRIA POPOLARE

GEOMETRIA POPOLARE

DI

C. L. LITTROW

TRADUZIONE DAL TEDESCO CON NOTE

DI

DAVIDE BESSO

CON 134 INCISIONI



MILANO
E. TREVES & C., EDITORI
1869.

Milano. Tip. Treves, via Solferino, N. 11.

PREFAZIONE DEL TRADUTTORE

Non è certo necessario spender parole per dimostrare l'utilità dei libri di scienza popolare. Il crescente favore che essi incontrano nel pubblico dimostra chiaramente che essi rispondono ad un reale bisogno dell'epoca nostra; in oggi tutti amano comprendere quei mirabili meccanismi mercè i quali l'ingegno umano utilizza le forze della natura, tutti vogliono rendersi conto, almeno sommariamente, dei più importanti fenomeni che si succedono sotto ai nostri occhi. La meccanica, la fisica, l'astronomia, attraggono ormai l'attenzione di tutte le classi sociali: queste importantissime scienze sono avidamente studiate anche da coloro che non vi avrebbero alcun immediato interesse. — Lo studio di queste scienze presenta però qualche ostacolo ai principianti sprovveduti delle più elementari cognizioni di geometria; perciò appunto sembrerebbe opportuna la pubblicazione di una *Geometria Popolare* completamente spoglia di x e di y, scritta in modo piano e facile, nella quale sieno esposte con semplicità e chiarezza tutte quelle nozioni di Geometria che sono indispensabili alla chiara intelligenza dei libri popolari di meccanica, fisica ed astronomia e che in pari tempo possa servire all'ufficio di logica popolare.

Questi pregi mi sembrarono riuniti nella *Geometria*

Popolare dell'illustre astronomo C. L. Littrow pubblicata a Stuttgart per la prima volta fino dal 1839, e che ciò non ostante non ebbe — per quanto io sappia — alcuna traduzione italiana; per tal motivo credetti non del tutto inutile trasportarla nella nostra lingua.

Ho stimata opportuna l' aggiunta di alcune note destinate a svolgere il *concetto di dipendenza*, facendo notare talune fra le infinite leggi di dipendenza e procurando di mettere in rilievo alcuni pregiudizii matematici assai comuni.

Voglia il cortese Lettore giudicare queste note come un semplice tentativo, o piuttosto come un invito, che oserei rivolgere agli scrittori di geometria elementare, di non trascurare l'importante concetto della dipendenza che è il concetto dominante della matematica e, sarei per dire, di tutte le scienze, e che, esposto convenientemente, dovrebbe servire a mio debole avviso, a mantenere uno stretto legame fra la matematica e tutti i rami dello scibile, e ad agevolare lo studio delle parti superiori della matematica.

Viadana, 31 Maggio 1869.

DAVIDE BESSO.

GEOMETRIA POPOLARE

INTRODUZIONE

Il vocabolo Geometria deriva dalle parole greche *ge* (Terra), *metron* (misura), epperò secondo il suo significato etimologico vorrebbe dire arte di misurare la Terra e sarebbe quindi la stessa cosa di agrimensura. Però la cosa è diversa e sebbene l'agrimensore abbia bisogno della Geometria pure l'arte sua è essenzialmente diversa da ciò che al giorno d'oggi s'intende per Geometria. È verosimile che gli uomini siano arrivati a scoprire i primi teoremi di questa scienza costretti dalla necessità di partire i terreni. Sembra infatto che la Geometria sia stata un'invenzione degli Egizi. L'ampio Nilo che attraversa l'Egitto da un capo all'altro, sorpassa, in certe epoche dell'anno, le sue rive, inonda tutte le campagne circostanti non lasciando più alcuna traccia delle linee di confine che separavano le diverse possessioni. Al ritirarsi delle acque sorge la necessità di ristabilire i confini delle singole possessioni: ecco manifestarsi il bisogno dell'agrimensura. La moltiplicità e la varietà dei problemi cui davano origine queste operazioni permisero all'agrimensura di raggiungere in breve un alto grado di perfezione. S'intende da ciò che l'Egitto offriva molta opportunità allo sviluppo della Geometria, però tale opportunità dovette manifestarsi anche altrove e la Geometria potè quindi svilupparsi e perfezionarsi assai rapidamente.

La Geometria insegna a misurare le quantità, studia le diverse forme sotto le quali le quantità si presentano e le paragona fra loro. L'architetto che giudica della grandezza e dei rapporti che più convengono alle varie parti d'un edificio, il falegname che apparecchia e misura le travi

d'una fabbrica, il navigante che determina la velocità e la direzione della nave, l'astronomo che determina la distanza degli astri, tutti misurano estensioni, tutti applicano la Geometria. L'agrimensura è una delle tante applicazioni della Geometria, la quale fornisce appunto le regole generali egualmente necessarie a tutti questi scopi.

Molte di queste regole furono scoperte ed applicate fin dai primordi, e certo non tutte sono dovute ad un solo uomo nè ad un'epoca sola, ma sorsero gradatamente per opera di molti a misura che il bisogno andava manifestandosi.

Primo a raccogliere le sparse nozioni di Geometria ed a stabilirne il legame nel modo più perfetto, fu Euclide, scienziato fra i più illustri dell'antichità, che fiorì in Egitto 300 anni all'incirca prima dell'Era volgare. Euclide non si limitò a raccogliere le sparse nozioni di Geometria che si avevano ai suoi tempi, ma arricchì in pari tempo la scienza geometrica di importanti scoperte e lasciò alla posterità quelli *Elementi di Geometria* che, sebbene scritti già da venti secoli, pure raggiungono così perfettamente lo scopo, che ancor oggi tengono il primato fra i libri elementari di Geometria.

La diffusione dell'insegnamento della Geometria non vuol essere attribuita esclusivamente alle numerose e svariate applicazioni di questa scienza, ma benanco al suo pregio speciale di acuire l'ingegno meglio d'ogni altra scienza. Ed invero il matematico acquista tale forza di raziocinio, tale potenza di deduzione e tale proprietà di linguaggio, che lo distinguono da quanti rimasero privi di questo esercizio di logica. D'altra parte la fisica e l'astronomia, non possono assolutamente essere studiate con profitto ove non si posseggano le nozioni più elementari di Geometria.

Ora, sia come avviamento allo studio degli Elementi di Euclide, sia ancora per agevolare la via a quanti amano leggere opere popolari intorno alle scienze summenzionate, potrà forse giovare questo trattatello che si discosta alquanto dal metodo di Euclide.

CAPITOLO PRIMO.

Natura della linea retta. — Linee rette e linee curve. — Figure geometriche. — Angolo. — Angolo acuto ed angolo ottuso. — Angolo retto.

1. Tutti sappiamo cosa sia la *linea retta*, della quale si ha una imagine sensibile per mezzo di un filo perfettamente teso da un capo all'altro.

2. Per due punti non può passare che *una* sola linea retta mentre infinite possono essere le linee curve che possono unire due punti. Così fra i due punti A e B (fig. 1) si può condurre un' infinità di linee curve le quali si incontrino soltanto in questi due punti. Ossia, ritornando all'imagine del filo, possiamo figurarci moltissimi fili più o meno tesi da un capo all' altro, ma uno solo di questi sarà perfettamente teso; esso rappresenterà la linea retta.



Fig. 1.

3. Aggiungiamo che la *linea retta* è la *più corta* fra tutte le linee che uniscono due punti, perchè manifestamente si richiede tanta minor lunghezza di filo quanto più fortemente esso vien teso. È questa un'altra proprietà che distingue la linea retta da tutte le altre.

4. Un altro carattere distintivo della linea retta è che essa, come dice Euclide, giace egualmente fra i suoi punti. Si approfitta di questa proprietà quando si guarda lungo

una riga per verificarne l'esattezza, se lo spigolo della riga è perfettamente rettilineo, vi sarà una posizione in cui l'estremo più vicino all'occhio nasconderà tutto lo spigolo.

5. *La figura geometrica* è uno spazio compreso da linee. Epperciò con due linee rette non è possibile formare alcuna figura; se ad esempio dal punto A (fig. 2) conduciamo due linee rette A B e A C queste non possono incontrarsi in un altro punto per ciò che si è già detto (Vedi il N. 2) e quindi lo spazio A B C rimane aperto dalla parte di B e C e le linee A B, A C formano soltanto un *angolo* B A C.



Fig. 2.

6. L'angolo è dunque lo spazio che è in parte compreso da due linee rette; il punto A si dice il *vertice* dell'angolo, le linee rette A B, A C i suoi lati; l'angolo si denota colle tre lettere A, B, C, ponendo in mezzo quella del vertice, così il nostro angolo (fig. 2) è B A C.

7. Un angolo diviene più piccolo o più grande secondo che i lati che lo formano sono più o meno aperti. Così l'angolo B A C della figura 3 è più grande dell'angolo BAC della figura 2.



Fig. 3.

8. Per riconoscere *se due angoli sono eguali* si farà coincidere il vertice dell'uno col vertice dell'altro e un lato dell'uno con un lato dell'altro; quindi si osserverà se gli altri due lati coincidano perfettamente o no: nel primo caso i due angoli saranno eguali; nel secondo caso sarà più grande quello dei due angoli il lato del quale cadrà fuori dell'altro.

9. Se le due linee rette B C e D E si tagliano nel punto A (fig. 4), si hanno, intorno a questo punto, quattro angoli i quali sono a due a due eguali: cioè sono fra loro eguali i due angoli più grandi D A C e B A E e sono del pari

fra loro eguali gli altri due angoli più piccoli E A C e B A D, come si può facilmente convincersi nel modo già indicato (Vedi N. 8). Così fatti angoli, fra loro eguali, si chiamano *opposti al vertice.*

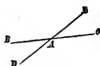


Fig. 4.

10. Facciamo ora ruotare la retta D E intorno al punto A, press'a poco come si muove una lama della forbice nell'aprirla o nel chiuderla: è chiaro che i due angoli opposti al vertice più piccoli, ossia gli angoli B A D, E A C crescono nell'istessa misura con cui diminuiscono gli altri due più grandi (B A E, D A C) e viceversa, secondo che, in questa rotazione, il punto E si allontana o si avvicina al punto C. È però evidente che vi sarà una posizione della retta D E nella quale i quattro angoli che sono intorno ad A saranno fra loro eguali e questo è il caso rappresentato dalla fig. 5. In questo caso si dice che le due rette B C e D E sono fra loro *perpendicolari* e i quattro angoli eguali ch'esse formano diconsi *retti.*

11. Si intende ora facilmente cosa siano gli angoli *acuti* e gli angoli *ottusi;* sono acuti tutti gli angoli più piccoli ed ottusi tutti gli angoli più grandi dell'angolo retto.

12. I quattro angoli formati da due rette che si incontrano (fig. 4) sono sempre, presi insieme, eguali a *quattro retti.* Ciò è manifesto nel caso della figura 5 e in generale facendo ruotare la retta D E intorno al punto A, una coppia dei quattro angoli diminuisce nell'istessa misura con cui l'altra aumenta, per cui *la somma dei quattro angoli resta sempre la stessa;* questa somma è in ogni caso, eguale a quattro angoli retti.

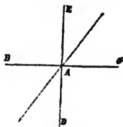


Fig. 5.

13. Osserviamo ancora che per formare i due angoli

retti della figura 5 che stanno sopra la retta D E, possiamo servirci o dei due angoli retti della stessa figura oppure dell'angolo acuto E A C e dell'ottuso E A B, della fig. 4, i quali si trovano dalla stessa parte di B C, per cui questi due angoli, presi insieme formano sempre due angoli retti.

Questi due angoli si dicono fra loro *adiacenti* e nascono tutte le volte che una retta B C viene incontrata da un'altra retta A E.

Nota al Capitolo primo.

Possiamo formarci una chiara idea della reciproca dipendenza di due angoli fra loro adiacenti considerando il moto di un corriere il quale debba percorrere la strada A B (fig. 6) lunga, p. e., due chilometri. Supponiamo che il corriere sia partito dal punto A dirigendosi verso il punto B; quanto più ei si allontana dal punto di partenza, tanto più ei si avvicina al punto d'arrivo; ma le distanze, da ciascuno di questi due punti al punto in cui si trova il corriere, prese insieme, sono sempre eguali a due chilometri. In una sola posizione il corriere si troverà ad egual distanza dal punto di partenza e dal punto di arrivo, quando cioè sarà a mezza strada, quando avrà percorso un chilometro preciso. In tutte le altre posizioni occupate dal corriere, le distanze da esso ai due punti di partenza e di arrivo, saranno sempre diverse, pur rimanendo inalterata la distanza che separa quei due punti estremi.



Fig. 6.

E come in tal caso vi è un solo punto in cui quelle due distanze sono fra loro eguali, così comprendiamo ancora che nel caso analogo dei due angoli adiacenti vi è una sola posizione della retta D E in cui questi due angoli sono fra loro eguali; comprendiamo adunque che dal punto E (fig. 5) non si può condurre che una sola retta perpendicolare a B C. Da queste semplici considerazioni, impariamo a conoscere uno dei tanti modi di *dipendenza* delle quan-

tità; nel corso di questo scritto incontreremo altri notevoli esempi di dipendenza. Nel caso ora accennato troviamo due quantità che variano insieme per modo che mentre l'una cresce l'altra diminuisce e precisamente colla legge che la loro somma è sempre la stessa ossia, come si dice è *costante.*

Credo opportuno invitare il cortese lettore a fissare l'attenzione su questa legge ed a prevenirlo fin d'ora che essa non è la sola, ma *una delle tante* leggi per le quali una quantità può crescere al diminuire di un'altra.

Aggiungiamo ancora che la cognizione di queste leggi di dipendenza è uno dei molti vantaggi che risultano dallo studio della Geometria. Chè il vago concetto di dipendenza non è nuovo per alcuno, perchè in tutte le cose della vita pratica vediamo esempi di reciproca variabilità, e fra questi citiamo l'esempio ovvio del prezzo di una merce che varia al variare del peso o del volume o dell'estensione superficiale o lineare. Ma appunto perchè in questo caso ha luogo quella legge assai semplice che, p. es., il prezzo cresce col peso cosichè a peso doppio corrisponde il prezzo doppio, a peso triplo il prezzo triplo, ecc., molti son portati a credere che questa medesima legge abbia luogo tutte le volte che una quantità cresce col crescere di un'altra.

Incontreremo fra breve alcuni fra i tanti casi in cui una quantità cresce col crescere di un'altra senza che tuttavia si verifichi questa legge particolare.

CAPITOLO SECONDO.

Triangolo. — Lati ed angoli del triangolo. — Eguaglianza dei triangoli. — Condizioni richieste per l'eguaglianza. — Proprietà caratteristica del triangolo. — I triangoli equiangoli sono simili. — Triangolo isoscele. — A lati eguali corrispondono angoli eguali; a lati diseguali angoli diseguali. — Condurre una perpendicolare. — Triangolo equilatero.

14. Si è veduto al N. 5 che due rette non bastano a limitare uno spazio: a tal uopo se ne richiedono almeno tre. La figura in tal modo formata da tre linee rette (fig. 7) si chiama *triangolo* perchè contiene sempre tre angoli.

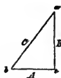


Fig. 7.

15. Le linee rette che formano la figura o in altre parole, i lati degli angoli che in quella si trovano, si chiamano *lati* della figura. Uno dei tre lati di un triangolo viene talvolta chiamato *base:* d'ordinario è il lato inferiore; ma del resto non v'ha alcuna reale differenza fra le due espressioni *base* e *lati*, ed ogni lato di un triangolo può essere considerato qual base di esso.

16. Se ritagliamo dalla carta i due angoli *b* e *c* (fig. 7) potremo facilmente costruire degli angoli eguali a questi.



Fig. 8.

Ora segnata la retta A' (fig. 8) eguale alla retta A della fig. 7, portiamo all'estremità di questa retta i due angoli *b'* e *c'* eguali agli angoli *b* e *c* della fig. 7. Prolungati i lati di questi due angoli *b'* e *c'* ne risulta un triangolo nel quale un lato A' e i due angoli *b'* e *c'* sono rispettivamente eguali al lato A ed ai due angoli *b* e *c* del triangolo rappresentato dalla fig. 7. Ora confrontando bene

questi due triangoli si trova che anche gli altri elementi del secondo triangolo sono perfettamente eguali ai corrispondenti elementi del primo triangolo cioè il lato B' eguale al lato B, il lato C' eguale al lato C e l'angolo a' eguale all'angolo a, risulta dunque che i due triangoli sono in tutto fra loro eguali cosichè sovrapposti l'uno all'altro *combaciano* perfettamente.

Due triangoli sono dunque eguali se un lato e i due angoli vicini del primo triangolo sono eguali ad un lato ed ai due angoli vicini del secondo triangolo. E da ciò risulta che per convincersi della perfetta eguaglianza di due triangoli non sarà necessario esaminare tutte le loro parti, ma basterà esaminare soltanto un lato coi due angoli che gli son vicini.

Se facciamo una piegatura od orecchia ad una pagina di un libro, otteniamo un triangolo; tutti riconoscono che questo triangolo è perfettamente eguale a quello che resta coperto dall' orecchia; ora il fondamento di ciò sta appunto nel teorema geometrico testè stabilito perchè la linea della piegatura è comune ad entrambi i triangoli ed i due angoli vicini a questo lato sono eguali nei due triangoli.

Questo semplicissimo teorema è della massima importanza ed è fecondo di svariate applicazioni.

Le difficoltà che molti incontrano in somiglianti teorie derivano piuttosto dalla novità della fraseologia tecnica, anzichè dalla cosa in sè stessa.

Del resto noi abbiamo incominciato dalla considerazione dei triangoli, perchè, come in seguito vedremo, ogni figura geometrica chiusa da linee rette si può decomporre in triangoli, ed è agevole riconoscere le relazioni che passano fra le varie figure geometriche, quando già si conoscano le relazioni che han luogo nei triangoli. Epperciò sarà importante esaminare i varii casi nei quali si verifica l'eguaglianza di due triangoli.

17. Si può ancora nell'istessa guisa convincersi che *due triangoli* (fig. 9 e 10) *sono in tutto eguali fra loro quando un angolo c coi due lati A e B che lo comprendono*, nell'un triangolo, è eguale ad un angolo *c'* coi due lati A' e B' che lo comprendono nell'altro triangolo.



Fig. 9.

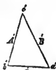


Fig. 10.

18. Conduciamo ora una retta A' (fig. 11) eguale alla retta A della fig. 9, ritagliamo dalla carta l'angolo *b* e guidiamo la linea C' facendo l'angolo *b'* eguale all'angolo *b* della fig. 9. Prendiamo pure un modello dell'angolo *a*, poniamo sul lato C' uno dei due lati del modello e moviamo quest'ultimo lungo la linea C' fino a che l'altro lato del modello passerà per l'estremo superiore di A'. Condotta quindi la retta B' ne risulta un triangolo (figura 11).

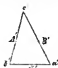


Fig. 11.

Paragonando questo triangolo col triangolo della fig. 9, si riconosce che sono rispettivamente eguali tanto i lati A ed A' quanto gli angoli *b* e *b'* e gli angoli *a* ed *a'*. Ora questi due triangoli sovrapposti l'uno all'altro combaciano perfettamente; si può quindi concludere che sono eguali fra loro.

Epperciò due triangoli sono fra loro eguali anche nel caso in cui due angoli ed il lato opposto al primo di essi nell'un triangolo sono eguali a due angoli ed al lato opposto al primo di essi nell'altro triangolo.

19. *Infine due triangoli sono eguali fra loro se i tre lati dell'uno sono eguali ai tre lati dell'altro,* della qual cosa si può facilmente convincersi disegnando un triangolo qualunque e prendendo tre linee rette, rappresentate ad esempio da fili di ferro, rispettivamente eguali ai tre lati del triangolo disegnato; riunite quindi insieme queste tre rette per modo da formare un triangolo, lo si trasporti

nell'opportuna posizione sul triangolo dapprima disegnato e si vedrà che i due triangoli combaciano perfettamente.

20. La rigorosa dimostrazione di questo principio è soggetta a qualche difficoltà, ma noi possiamo accontentarci di questa sua rappresentazione sensibile. Soltanto vogliamo ancora avvertire che se *in questo caso* si hanno due figure che risultano fra loro eguali quando i lati dell'una sono eguali ai lati dell'altra, non si può tuttavia concludere che tale eguaglianza si verifichi analogamente per tutte le figure geometriche, tale eguaglianza si verifica *esclusivamente* nei triangoli; si può facilmente riconoscere che essa non si verifica punto nelle altre figure geometriche. Così ad esempio, le figure 12 e 13 ci rappresentano due quadrilateri nei quali i quattro lati A. B. C. D. dell'uno sono rispettivamente eguali ai lati A'. B'. C'. D'. dell'altro, eppure le due figure sono ben diverse l' una dall' altra, tanto nella forma quanto nella grandezza.



Fig. 12.



Fig. 13.

21. Trattandosi del confronto di due triangoli dal punto di vista della loro eguaglianza, è naturale che debba venire in mente il caso in cui due triangoli abbiano eguali rispettivamente gli angoli. Però in questo caso non ha luogo necessariamente l'eguaglianza, anzi osservando i tre triangoli delle figure 14, 15, 16 che hanno gli angoli eguali, vediamo ch'essi sono *simili nella forma* ma ben *diversi di grandezza*. Ci basti per ora questo breve cenno, chè di questi e somiglianti casi tratteremo in seguito.



Fig. 14.



Fig. 15.



Fig. 16.

22. Or s'abbia (fig. 17) un triangolo i cui lati A e B siano fra loro eguali, e partendo dal punto *c* si guidi la retta cC che termina al punto di mezzo del lato C. È chiaro che questa retta divide il nostro triangolo in due triangoli minori i quali hanno eguali i lati, perchè A è eguale a B, Cc è comune ai due triangoli ed inoltre *b*C è eguale a C*a* perchè il punto C è nel mezzo di *ab*. Ora questi due triangoli sono fra loro eguali per quello che si è già detto al N. 19; per conseguenza anche gli angoli in *C*, gli angoli in *c* e gli angoli in *a* e *b* sono fra loro eguali.

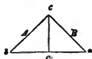


Fig. 17.

Ma se gli angoli in C sono fra loro eguali, ciascuno di essi è retto (Vedi il N. 10) e quindi la retta Cc è perpendicolare al lato C.

Un triangolo siffatto, nel quale due lati sono fra loro eguali si chiama *iscoscele*: *c* è il suo *vertice*, il lato *C* è la sua *base*.

Dunque nel *triangolo isoscele gli angoli alla base sono fra loro eguali, la retta che congiunge il vertice col punto di mezzo della base è perpendicolare alla base ed infine questa retta divide l'angolo al vertice in due parti eguali.*

23. Conduciamo ora una retta *C* (fig. 18) e con un angolo ritagliato dalla carta, portiamo agli estremi di questa retta due angoli eguali *a* e *b*. Prolunghiamo i lati di questi due angoli, avremo così un triangolo i cui lati A e B saranno fra loro eguali come riesce evidente per mezzo della immediata misura. Ma se inoltre conduciamo dal punto *c* la retta *c*C perpendicolarmente alla retta C, la suddetta eguaglianza dei lati A e B si renderà pure manifesta considerando i due triangoli *ac*C e *bc*C in tal modo formati. Per quanto abbiam detto al N. 18 questi due trian-

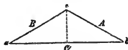


Fig. 18.

goli sono fra loro eguali, perchè hanno il lato C *c* comune, gli angoli in C eguali perchè retti e gli angoli *a* e *b* pure eguali per la nostra costruzione. Consegue ancora dalla eguaglianza di questi triangoli che tanto il lato C quanto l'angolo *c* sono divisi in due parti eguali dalla perpendicolare C*c*.

Dunque *se un triangolo ha due angoli eguali anche i lati opposti a questi due angoli sono fra loro eguali e perciò il triangolo è isoscele. La perpendicolare condotta dal vertice alla base di un triangolo isoscele dimezza tanto la base quanto l'angolo al vertice.*

24. E nell'istessa guisa che questa eguaglianza di lati porta per conseguenza un'eguaglianza di angoli, e viceversa, così anche una diseguaglianza di lati avrà per conseguenza una diseguaglianza di angoli, così p. e., all'angolo più grande sarà sempre opposto il lato più grande, il che risulta già dalla semplice ispezione di parecchi triangoli coi lati diseguali.

25. Per disegnare un angolo retto o ciò che torna lo stesso per condurre una retta perpendicolare ad un'altra, si taglierà un pezzo di carta in modo che almeno un lato di esso sia una linea retta e quindi si ripiegherà la carta in modo che una parte di questa linea retta cada precisamente sull'altra.

26. Se i tre lati di uno stesso triangolo sono fra loro eguali, anche i tre angoli dovranno essere fra loro eguali, perchè a ciascuna coppia di lati eguali deve corrispondere una coppia di angoli eguali (Vedi N. 23). E viceversa, se i tre angoli di un triangolo sono fra loro eguali anche i tre lati dovranno essere eguali fra loro.

Di ciò si può eziandio persuadersi disegnando un triangolo così fatto, che si chiama *equilatero* (fig. 19) e paragonando gli angoli fra loro, oppure, disegnando un triangolo coi tre angoli eguali e quindi confrontandone i lati che risulteranno fra loro eguali.



Fig. 19.

Nota al Capitolo secondo.

Fissando l'attenzione sulle proposizioni contenute in questo capitolo possiamo fare qualche utile riflessione sull'idea di dipendenza già accennata nella nota precedente. Consideriamo infatti uno dei casi testè esaminati di eguaglianza dei triangoli, p. e., il caso di due triangoli nei quali sono eguali un lato coi due angoli vicini. Poichè sussiste quest'eguaglianza, convien concludere che un triangolo è pienamente determinato quando sono conosciuti un suo lato ed i due angoli che gli son vicini, perchè tutti i triangoli che si costruiscono con questi tre elementi hanno necessariamente eguali anche gli altri tre. Da questa proposizione si riconosce che deve esistere una certa dipendenza fra i primi tre elementi del triangolo e gli altri tre, e questa dipendenza dev'essere tale che conosciuti quei primi tre elementi si deve per conseguenza essere in grado di determinare anche gli altri tre. Dovranno quindi sussistere certe leggi colle quali al variare di un lato o dei due angoli vicini dovranno variare gli altri due lati e il terzo angolo. Or quali saranno queste leggi? La geometria elementare non può determinarle in generale ma sibbene può assegnarne alcuni casi particolari come in seguito vedremo. Per ora ci basti aver acquistata l'idea di cosa sia una legge di dipendenza ed aver imparato che tali leggi devono necessariamente sussistere fra le sei parti di un triangolo.

Osserviamo ancora che la cognizione delle varie leggi di dipendenza forma il fondamento d'ogni scienza. Così dopo scoperte le leggi di dipendenza che reggono il moto degli astri, l'astronomia raggiunse lo stato di scienza perfetta, perchè col mezzo di queste leggi e coll'ajuto del potente calcolo matematico, essa è in grado di prevedere i fenomeni celesti con sorprendente precisione; essa potè perfino assicurarsi dell'esistenza di un astro e della posizione in cui ei doveva trovarsi nel cielo alla tal ora del tal giorno, sebbene nessuno lo avesse osservato fino allora.

E quante volte nelle cose che risguardano l'uomo e l'umana Società, ci incontriamo in quantità che variano al variare di altre, comprendiamo tosto che devono pur esistere certe dipendenze fra quelle quantità ma, non sempre ci è dato scoprire le leggi che re-

golano quelle dipendenze: alcune di esse rimarranno forse per sempre incognite all'uomo. — Perciò appunto le così dette scienze morali sono ancor lontane dalla perfezione, chè difficilmente si possono assegnare le leggi di dipendenza dei fenomeni ch'esse presentano, per la troppa complicazione di questi, sebbene nessuno possa dubitare dell'esistenza di queste leggi.

Ci sia permessa un'altra osservazione che ci è suggerita dal teorema esposto al N. 24. Supponiamo che il lato *a b* (fig. 18) e l'angolo in *a* restino costanti e facciamo variare l'angolo in *b*, vedremo allora che al crescere dell'angolo in *b* cresce contemporaneamente anche il lato opposto *a c* e viceversa, come riesce manifesto dalla figura 20. Ecco quindi due quantità (un angolo di un triangolo e il lato opposto a quell'angolo) che crescono insieme e diminuiscono insieme, come si è detto nella nota precedente, in tal caso molti son portati a credere che abbia luogo quella certa legge per la quale se l'angolo in *B* (fig. 20) diventasse doppio, triplo, ecc., dovrebbe pur diventar doppio triplo, ecc., anche il lato AC. Or basta ispezionare attentamente la figura 20 per accorgersi che questa legge qui non si verifica. Ed in vero in questa figura abbiam fatto eguali gli angoli C B A, C' B C C'' B C', C''' B C'', e vediamo che le corrispondenti porzioni del lato A C, cioè le porzioni A C, C C', C' C'', C'' C''' non sono punto fra loro eguali ma invece crescono continuamente.

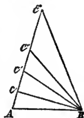


Fig. 20.

CAPITOLO TERZO.

Linee parallele. — Non si tagliano. — Sono da per tutto egualmente distanti. — Sono egualmente inclinate rispetto alle rette che incontrano. — Sono perpendicolari ad una medesima retta. — Condurre una parallela.

27. Prendiamo un' angolo ritagliato dalla carta, indichiamo con *a* questo angolo e portiamolo sopra un foglio sul quale sia disegnata una retta A B (fig. 21); collochiamo l'angolo in modo che uno dei suoi lati copra un tratto di quella retta A B. Diciamo P il punto della A B che rimane coperto dal vertice dell'angolo *a* poi, seguendo l'altro lato di quest' angolo, disegneremo sul foglio la linea PQ. Ciò fatto, collochiamo il nostro angolo di carta in modo che il lato che prima cadeva sulla A B, cada ora sulla PQ, in modo però che il secondo lato cada sulla sinistra della PQ; indichiamo con Q il punto in cui cadrà il vertice dell' angolo di carta e disegniamo il suo secondo lato, questo avrà la direzione Q C. In tal modo si avrà disegnato un angolo *b* precisamente eguale all' angolo *a;* per ultimo, prolunghiamo verso destra il lato C Q. — Ispezionando la figura così ottenuta, si riconosce a colpo d'occhio che le due rette A B, C D non sembrano nè avvicinarsi nè allontanarsi in nessun punto l' una dall' altra, perciò si potrebbe prolungarle ad arbitrio, tanto a destra quanto a sinistra, senza che mai s'incontrassero. E in realtà, se da diversi punti presi ad arbitrio sulla CD conduciamo altrettante perpendicolari sulla AB, troviamo che queste perpendicolari sono tutte preci-

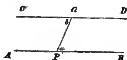


Fig. 21.

samente della stessa lunghezza il che ci prova che le due linee AB, CD sono da per tutto egualmente distanti.

28. *Linee talmente disposte che da per tutto hanno la stessa distanza e che non si incontrerebbero mai per quanto venissero prolungate, si chiamano parallele.*

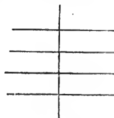
29. Dalla costruzione della fig. 21 risulta chiaramente che se due linee rette parallele AB, CD *sono incontrate da una terza linea retta* PQ gli angoli *a* e *b* che questa terza retta forma colle altre due, l'uno da una parte e l'altro dall'altra, saranno fra loro *eguali.* I due angoli *a* e *b* così formati, diconsi *angolo alterni*, l'eguaglianza dei due angoli alterni ha luogo manifestamente per qualsiasi posizione della terza retta come ci è chiarito ad es., della fig. 22.



Fig. 22.

30. Segue pure da ciò che se una linea retta *incontra due parallele* e forma un *angolo retto* con una delle parallele, deve pur formare un'*angolo retto* anche coll'altra parallela.

31. Dunque una linea retta la quale sia perpendicolare ad una delle rette parallele è pur perpendicolare all'altra ed in generale è perpendicolare a tutte le rette parallele alla prima, fig. 23.


Fig. 23.

32. Conduciamo ora due rette parallele e tagliamole con una terza retta (fig. 24). Vedremo formarsi otto angoli; quattro dei quali o come angoli alterni (Vedi il N. 29) o come angoli opposti (Vedi il N. 9) sono fra loro eguali e perciò sono indicati (fig. 24) colle stesse lettere. In particolare si chiamano *angoli corrispondenti* fra le parallele due angoli, come ad es., *a* e *a* che trovansi tutti e due dalla stessa parte della trasversale e dalla stessa parte delle parallele. Similmente sono angoli

corrispondenti *b* e *b*. *Dunque due angoli corrispondenti fra le parallele sono eguali.*

33. Due coppie di angoli *a* e *b* sono *interni* della stessa parte della trasversale. Analogamente le altre due coppie di angoli *a* e *b* si dicono *esterni*. Gli angoli *a, a....* sono tutti acuti e gli angoli *b, b....* sono tutti ottusi e come angoli adiacenti (Vedi il N. 13) uno degli angoli *a, a...*

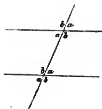


Fig. 24.

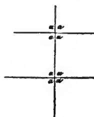


Fig. 25.

sommato ad uno degli angoli *b, b....* dà sempre una somma eguale a due angoli retti.

Perciò *tanto la somma di due angoli interni dalla stessa parte della trasversale quanto la somma di due angoli esterni, corrisponde sempre a due angoli retti.*

34. Se la linea trasversale è perpendicolare alle parallele come nella fig. 25, tutti gli otto angoli sono fra loro eguali, perchè ciascun d'essi è retto.

35. Per condurre una parallela ad una retta AB basta innalzare su questa la perpendicolare MP (fig. 26) e quindi

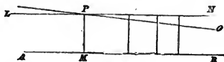


Fig. 26.

condurre la retta LN perpendicolare alla MP; questa linea LN sarà parallela alla AB perchè la retta trasver-

sale M P taglia sotto lo stesso angolo tanto la retta A B quanto la retta LN

36. Ma è chiaro che pel punto P non si può condurre che una sola retta parallela ad AB, perchè in qualsiasi modo venga condotta l'altra retta PO questa non soddisferà più alla condizione di essere da per tutto egualmente distante dalla retta AB e prolungando convenientemente tanto quest'ultima quanto la retta PO, i due prolungamenti dovranno incontrarsi, o tosto o tardi (Vedi il N. 28).

Nota al Capitolo terzo.

Il concetto di dipendenza applicato agli esempii di questo capitolo ci conduce alla stessa legge notata alla fine del capitolo primo. Tanto i due angoli interni dalla stessa parte della trasversale quanto i due angoli esterni dalla stessa parte della medesima variano insieme nello stesso modo di due angoli fra loro adiacenti cioè in guisa che la loro somma si mantiene sempre eguale a due angoli retti: di quanto aumenta l'uno dei due angoli interni od esterni, di altrettanto diminuisce l'altro e viceversa.

È evidente che la prima e la più semplice fra le leggi di dipendenza è quella di due grandezze che si mantengon sempre eguali fra loro. Due grandezze cosifatte nascono insieme e crescono insieme nella stessa misura, com'è il caso degli angoli opposti al vertice, degli angoli alterni e degli angoli corrispondenti fra le parallele.

CAPITOLO QUARTO.

Variazioni degli angoli di un triangolo corrispondenti alle variazioni dei suoi lati. — L'uno diminuisce quando l'altro aumenta. — Ma la loro somma è sempre la stessa e sempre eguale a due angoli retti. — Una figura quadrilatera. — Sua decomposizione in triangoli. — La somma dei suoi angoli è costante ed eguale a quattro angoli retti. — Somigliante conclusione per una figura di cinque lati; per tutte le figure rettilinee. — Eguaglianza degli angoli di due triangoli. — Grandezza degli angoli di un triangolo equilatero e di un triangolo rettangolo.

37. Imaginiamoci un triangolo ABC (fig. 27) un lato del quale BC passi sempre pel punto B ma varii di posizione lungo il lato AC prolungato. Quale variazione subiranno gli angoli in B e C per questo movimento del lato BC? È chiaro che mentre cresce l'uno di questi due angoli l'altro diminuisce e viceversa. Perchè se allontaniamo C da A vediamo che l'angolo in C diviene sempre più piccolo mentre l'angolo in B diventa sempre più grande; se all'incontro avviciniamo il punto C al punto A, vedremo succedere tutto l'opposto cioè crescere l'angolo in C e diminuire l'angolo in B. E siccome l'uno dei due angoli aumenta di tanto di quanto l'altro diminuisce, come si può convincersi coll'immediata misura, così bisogna concludere che la somma totale dei tre angoli non rimane alterata perchè essa guadagna da una parte quanto perde dall'altra.



Fig. 27.

La somma dei tre angoli d'un triangolo è dunque costante, qualunque sia il modo col quale variano i singoli

Per quanto questa verità possa a primo aspetto sembrar singolare ove si considerino le diverse forme che può assumere un triangolo, delle quali ci fornisce un esempio la fig. 28, pure possiamo facilmente convincercene colla effettiva misura dei tre angoli.

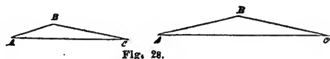


Fig. 28.

Ritagliamo infatti un triangolo di carta (fig. 29) e separiamone i tre angoli *a*, *b* e *c*. Riuniamo ora questi tre angoli per modo che tutti abbiano lo stesso vertice e che il secondo lato del primo angolo coincida col primo lato del secondo e che il secondo lato del secondo angolo coincida col primo lato del terzo angolo, come è appunto indicato dalla fig. 30;


Fig. 29.

ne risulterà un angolo che sarà eguale alla somma dei tre angoli *a b c*. Come si vede a colpo d'occhio, i due lati O M, O N che lo formano giacciono nella stessa linea retta. Epperciò i tre angoli presi insieme eguagliano due angoli retti; perchè se al punto O della retta M N innalziamo su questa la perpendicolare, ne risultano due angoli P O M e P O N ciascuno dei quali è retto e d'altra parte, questi due angoli P O M, P O N presi insieme eguagliano la somma dei tre angoli *a*, *b*, *c*. Quanto si è detto pel triangolo ABC vale per qualsiasi altro triangolo qualunque possa esserne la forma.

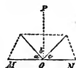


Fig. 30.

Un altro modo di convincersi della esposta verità è quello di ripiegare i tre angoli del triangolo ritagliato dalla carta per modo che i tre vertici vengano a riunirsi in un medesimo punto di uno stesso lato. Basta eseguire

quest' operazione con un po' di cautela e si trova che i lati di questi angoli vengono a coincidere precisamente e i lati esterni dei due angoli estremi cadono su quel lato del triangolo che è stato prescelto, il che dimostra appunto che la somma dei tre angoli del triangolo, è eguale a due angoli retti.

Questa proposizione esprime una delle più notevoli proprietà del triangolo. Sembra ch' essa sia stata trovata da Pitagora assai tempo prima di Euclide, e fu molto ammirata per la sua generalità e per la sua utilità.

Per buona sorte anche la sua rigorosa dimostrazione, quella stessa che ci vien data da Euclide, è tanto semplice, che non abbiamo difficoltà a comunicarla ai nostri lettori.

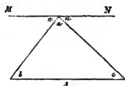


Fig. 31.

Dal vertice dell'angolo *a* di un triangolo (fig. 31) guidiamo la retta M N parallela al lato A; questa retta forma coi lati del triangolo due angoli *m* ed *n*. E siccome M N è parallela ad A così gli angoli *m* e *b* sono alterni fra le parallele epperciò eguali fra loro, e per la istessa ragione sono pure eguali fra loro gli angoli *n* e *c*. I tre angoli *m, a, n* sono quindi eguali ai tre angoli del triangolo; quei tre angoli *m, a, n* sono disposti sulla retta M N proprio nell' istesso modo in cui l'erano prima nella fig. 30 nella quale trovammo i tre angoli *a, b* e *c* presi insieme eguali a due angoli retti. Dunque *la somma del tre angoli di un triangolo è sempre eguale a due angoli retti.*

Da questo celebre teorema risultano molte notevolissime conseguenze. Ora ne faremo conoscere alcune delle più importanti.

38. Un triangolo non può avere che *un solo angolo retto* perchè essendo la somma di tutti e tre gli angoli eguale a due retti, è evidente che due angoli del triangolo presi

insieme devon essere sempre minori di due angoli retti. Un triangolo che ha un angolo retto si chiama *rettangolo*.

39. Riesce del pari evidente che un triangolo non può avere un angolo retto ed un angolo ottuso, giacchè quest'ultimo è ancor più grande di un retto.

40. E parimenti un triangolo non può avere due angoli ottusi poichè la somma di questi due è in ogni caso superiore a due angoli retti.

41. Epperciò se un triangolo ha un'angolo retto oppure un'angolo ottuso è necessario che gli altri due angoli siano acuti.

42. Se due angoli di un triangolo presi insieme sono eguali ad un retto, il terzo angolo deve necessariamente essere retto perchè la somma di tutti e tre deve sempre essere eguale a due retti.

43. Se in una figura quadrilatera ABCD (fig. 32) tiriamo una retta A C da uno dei vertici al vertice opposto, vediamo che questa retta divide la figura in due triangoli ABC e ADC e vediamo ancora che i sei angoli di questi triangoli sono formati dai quattro angoli del quadrilatero; perciò ne concludiamo che i *quattro angoli del quadrilatero, presi insieme, sono eguali a quattro angoli retti.* E siccome questa scomposizione in due triangoli avrà sempre luogo, così questo risultato sarà generale e varrà per qualsivoglia figura quadrilatera, comunque possano essere diversi i lati e gli angoli di quella figura.

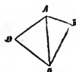


Fig 32.

Questa proprietà dei quadrilateri, non meno notevole di quella già studiata nei triangoli, si può facilmente comprendere pigliando quattro verghe diritte e unendole insieme per modo che vengano a formare un quadrilatero, in modo però che possano ruotare intorno ai loro punti estremi, sicchè la forma del quadrilatero possa variare a piacere muovendo i lati ora intorno ad uno, ora intorno

ad un altro dei vertici. Muovendo in tal modo i lati del quadrilatero, si riconoscerà che nessuno dei quattro angoli potrà aumentare senza che contemporaneamente diminuisca un altro angolo e viceversa, per modo che si potrà ragionevolmente presumere che la somma di tutti e quattro gli angoli si conservi sempre la stessa (Vedi il N. 37). Anche quest'esempio fa conoscere il vantaggio delle dimostrazioni matematiche; poichè, mentre la via testè indicata fornisce soltanto la verosimiglianza di questa proprietà del quadrilatero, e richiederebbe delle particolari e precise misurazioni, dopo le quali non si avrebbe ancor acquistata la piena certezza, la semplice considerazione sovra esposta, è non solo sufficiente a somministrarci la più profonda convinzione, ma serve nel tempo stesso a fornirci il *valore della somma costante* degli angoli d'un quadrilatero.



Fig. 33.

44. Anche una figura di cinque lati *(pentagono)* ABCDE (fig. 33) può venir sempre decomposta in tre triangoli; epperciò la somma degli angoli di un pentagono deve sempre eguagliare sei angoli retti.



Fig. 34.

45. Così una figura di sei lati *(esagono)* fig. 34 si potrà similmente decomporre colle tre rette A C, A D, A E in quattro triangoli, così analogamente la figura di sette lati si può decomporre in cinque triangoli, quella di otto in sei, ecc.

Or confrontando, in ciascuna di queste figure il numero dei lati col numero dei triangoli in cui essa viene decomposta, riesce palese che il numero dei triangoli è sempre eguale al numero dei lati diminuito di due. Si riconosce che questa proposizione è vera per tutte le figure considerando che ad ogni triangolo in cui vien decomposta la figura, corrisponde un lato di essa, eccettuati

però i due triangoli estremi, a ciascuno dei quali si riferiscono due lati della figura. Così, ad esempio, una figura di dodici lati potrà essere decomposta in dieci triangoli, e siccome la somma degli angoli di ciascun triangolo è eguale a due angoli retti, così tutti gli angoli di questa figura, presi insieme, saranno sempre eguali a venti angoli retti.

Da ciò risulta la seguente regola generale che serve a determinare la somma degli angoli di qualsivoglia figura rettilinea *(poligono)*.

Si diminuisca di due il numero dei lati, quindi si raddoppi il residuo, e si avrà il numero degli angoli retti che presi insieme eguagliano la somma di tutti gli angoli della figura.

Del resto, il fin qui detto ci offre un esempio della giustezza dell'osservazione esposta al N. 16, che, cioè, la teoria dei triangoli giova a semplificare lo studio delle altre figure; così nel caso attuale il solo teorema relativo alla somma dei tre angoli del triangolo ci ha dato il mezzo di imparare a conoscere colla massima facilità le proprietà analoghe di tutte le altre figure rettilinee, il che riescirebbe ben più difficile a chi volesse giungervi per altre vie.

46. *Se due angoli di un triangolo sono eguali a due angoli di un'altro triangolo, anche i terzi angoli devon essere fra loro eguali*, perchè ciascuno di questi terzi angoli aggiunto agli altri due deve formare la somma di due retti.

47. Epperciò se dati due triangoli vorremo dimostrare che i tre angoli dell'uno sono eguali ai tre angoli dell'altro, basterà provare che due angoli del primo triangolo sono eguali a due angoli del secondo triangolo, perchè ne risulterà di conseguenza anche l'eguaglianza dei terzi angoli.

48. *Se tre angoli di un triangolo sono fra loro eguali*,

ciascuno di essi dev'essere *la terza parte di due angoli retti* ossia due terzi di un angolo retto.

49. Dunque ciascun angolo del triangolo equilatero è eguale a due terzi dell'angolo retto, perchè (come si è veduto al N. 26) in ogni triangolo equilatero i tre angoli sono fra loro eguali.

50. È poi chiaro che i due terzi di un retto sono eguali ad un terzo di due retti (Vedi il N. 48) giacchè tre terzi di un retto compongono un retto, quindi sei terzi formano due retti e perciò due di questi terzi devono eguagliare il terzo di due retti.

Nota al Capitolo quarto.

Le leggi di dipendenza che risultano dalle proposizioni svolte in questo capitolo sono analoghe a quella che abbiamo già imparato a conoscere. Così i tre angoli del triangolo variano insieme per modo che la loro somma si conserva sempre la stessa, precisamente come tre angoli fra loro adiacenti. Della qual cosa possiamo avere un'imagine più sensibile prendendo un corpo qualunque e dividendolo in tre parti: queste potranno essere più grandi o più piccole e ciascuna di esse potrà variare fino a diventar molto vicina al tutto, ma tutte e tre prese insieme faranno sempre il tutto.



Fig. 35.

Od anche possiamo imaginare due palline le quali si muovano lungo la retta A B (fig. 35) mantenendosi però sempre fra i due estremi A e B di questa retta. Entrambe le palline potranno occupare un punto qualunque della retta A B, ossia la distanza fra le due palline e le distanze di una di esse dal punto A e dell'altra dal punto B, potranno di molto variare, ma la somma di tutte e tre queste distanze sarà sempre eguale alla retta A B; vale a dire in qualunque istante del moto delle due palline sulla retta AB, la somma delle tre distanze suddette è sempre eguale all'intiera lunghezza AB.

Con somigliante esempio potremmo rappresentare la reciproca dipendenza degli angoli di qualsivoglia poligono.

Vediamo quindi in generale che gli angoli di un dato poligono sono tali quantità che variano insieme per modo che la somma di tutte è costante. Così nel triangolo ciascuno dei tre angoli dipende dagli altri due con questa legge; ch'esso è sempre eguale a due angoli retti diminuiti della somma degli altri due. Ecco un esempio molto semplice di quanto si è detto in una precedente nota, cioè: che una volta conosciuta la legge di dipendenza fra più quantità, si può determinare una di queste quando si conoscano tutte le altre. Così se uno degli angoli di un triangolo è eguale a mezzo angolo retto, ed un altro è eguale alla terza parte di un angolo retto, fatta la somma di questi due angoli risultano $\frac{5}{6}$ di angolo retto e tolti questi da due intieri, cioè da 12 sesti restano 7 sesti di angolo retto i quali rappresentano per conseguenza il valore del terzo angolo del triangolo.

Volendo riconoscere per altra via che dev'essere possibile determinare un angolo di un triangolo quando si conoscono gli altri due angoli, rammenteremo che un triangolo è pienamente determinato quando sono dati un lato e i due angoli che gli son vicini. Risulta da questo teorema che l'angolo A del triangolo ABC (fig. 36) dipende dal lato B C e dai due angoli B e C, perciò quando si conoscano queste tre cose, si deve pur conoscere l'angolo A. Ma fin qui possiamo dire soltanto che queste tre cose *bastano* a determinare l'angolo A; non già che tutte e tre sieno a tal uopo *necessarie*, ossia che l'angolo A dipenda *necessariamente* da *tutte e tre*. Sorge quindi spontanea la domanda se l'angolo A dipende anche dal lato B C o soltanto dai due angoli B e C. Per risolvere questa questione ci si presenta un mezzo assai semplice: far *variare* il lato B C lasciando *costanti* gli angoli B e C ed esaminare quindi se l'angolo A cangia o no. A tal uopo guidiamo C' A' per modo che l'angolo C' sia eguale all'angolo C; sarà C' A' paralella a C A e quindi anche l'angolo in A' sarà eguale all'angolo in A. Dunque se il lato B C varia e diviene B C', senza che cangino i due angoli B e C, il terzo angolo A non cambia; epperò esso non dipende punto dal lato B C ma soltanto dai due angoli B e C. Dunque i tre an-

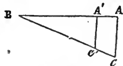


Fig. 36.

goli di un triangolo sono legati fra loro da tal relazione che dati due di essi si è in grado di determinare il terzo.

Il principio di cui abbiam fatto uso in questo ragionamento, viene continuamente applicato non solo in tutte le scienze ma benanco in molte cose della vita pratica, chè esso è il risultato del buon senso e della quotidiana esperienza. E viene applicato ogni qualvolta si cercano le cause prossime dei fenomeni.

Ed infatti per riconoscere se una certa circostanza abbia o no influenza in un dato fenomeno, facciamo variare questa circostanza lasciando costanti tutte quelle altre che potrebbero influenzare il fenomenò; se in tal caso vediamo cangiare qualche particolarità del fenomeno, dobbiamo concluderne che quella circostanza è proprio una delle cause che concorrono a formarlo; ma nel caso contrario siamo assicurati che il fenomeno non dipende punto da quella circostanza.

Così, per citarne un esempio: Tutti sanno che lasciando cadere dei corpi di diversa natura essi cadono al suolo con diversa velocità, p. e., lasciando cadere nell'istesso istante una pallina di piombo ed una piuma, la pallina di piombo giungerà al suolo prima della piuma. A primo aspetto sembra doversi concludere che la velocità dei gravi cadenti dipende dalla natura dei corpi; così infatti concludevano gli Aristotelici (i quali, come ben sapete, furono vittoriosamente combattuti dal nostro Galileo). Ed invero vi è un'altra causa che può concorrere alla produzione del fenomeno, perchè l'aria, in cui si muovono i corpi, oppone una resistenza più o meno grande ai diversi corpi e certo contribuisce a farne variare la velocità. Convien dunque decidere se il fenomeno dipende *soltanto* dalla resistenza dell'aria o se dipende anche dalla varia natura dei corpi; e per risolvere questa questione bisogna osservare il moto di diversi corpi facendo in modo che la resistenza dell'aria sia la stessa per tutti. È ciò che Newton ha esperimentato in due maniere per le quali è riuscito a mettere in piena luce il principio già intuito dal nostro Galileo, cioè che la forza acceleratrice della gravità è la stessa in ogni sorta di corpi.

—

CAPITOLO QUINTO.

Dipendenza della grandezza di un lato di un triangolo da quella dell'angolo opposto. — Limiti della somma e della differenza di due lati paragonati al terzo lato.

51. Consideriamo i triangoli delle figure 37, 38, 39 nei quali, come facilmente si vede, i lati segnati con A sono fra loro eguali e così pure quelli segnati con B, mentre gli angoli compresi *c* sono ben diversi: il più piccolo è quello della fig. 37 il più grande è quello della fig. 39. Il lato opposto a quest'angolo *c* cresce pur esso al crescere dell'angolo, nell'istessa guisa che aprendo una for-



Fig. 37.



Fig. 38.

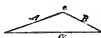


Fig. 39.

bice le due punte di essa si allontanano sempre più l'una dall'altra, e perchè questo paragone sia veramente appropriato al caso nostro basta immaginare che una delle due lame della forbice sia rotta per modo che la lunghezza di una lama sia alquanto diversa dalla lunghezza dell'altra. Risulta da ciò il seguente Teorema che richiese ad Euclide una dimostrazione piuttosto complicata:

Se due o più triangoli hanno fra loro eguali due lati, come in questo caso i lati A e B, *il terzo lato* C *è maggiore o minore secondochè è più grande o più piccolo l'angolo che gli sta in faccia.*

52. Avvicinando gradatamente il lato B al lato A l'angolo *c* diverrà sempre più piccolo e giungerà un momento in cui quest'angolo scomparirà affatto; cosa diverrà allora

il terzo lato C? — Ritorniamo ancora al paragone della forbice; poniamo dapprima che le due lame sieno di egual lunghezza ed osserviamo che quando la forbice è chiusa, le due punte coincidono e la loro distanza, cioè il lato C del triangolo si riduce a niente. Se poi supponiamo che le due lame abbiano diversa lunghezza, allora è manifesto che, chiudendo la forbice, la distanza delle due punte, cioè il lato C del nostro triangolo, riesce eguale alla differenza delle lunghezze delle due lame cioè alla differenza di lunghezza dei due lati A e B.

Ma se all'incontro allontaniamo l'un dall'altro i due lati A e B fino a che l'uno si adagi sul prolungamento dell'altro, com'è il caso della fig. 40, quale sarà allora la lunghezza del terzo lato C? Evidentemente la sua lunghezza sarà la somma degli altri due lati A e B.

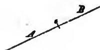


Fig. 40.



Fig. 41.

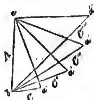
Possiamo concludere che allontanando l'un dall'altro due lati di un triangolo, il terzo lato divien sempre più grande ed infine eguaglia la somma degli altri due lati, ma non potrà in nessun caso superare questo valore. Che se all'incontro avviciniamo sempre più i due lati, il terzo lato diventa sempre più piccolo e finisce per essere eguale alla differenza dei due lati, ma non può mai divenire più piccolo di questa differenza:

Ma d'altronde, se questi due limiti fossero raggiunti, la figura cesserebbe d'essere un triangolo; per cui, ad esempio, nel primo caso si potrà tutt'al più costruire un triangolo molto aperto, come quello della figura 41, nella quale un lato C è ben poco diverso dalla somma degli altri due lati A e B ma però non è eguale a questa somma. Possiamo quindi stabilire il seguente teorema:

53. *In ogni triangolo un lato qualunque è sempre minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.*

Nota al Capitolo quinto.

Il teorema esposto al N. 51 ci suggerisce un'osservazione analoga a quella già esposta in una delle note precedenti. Anche qui abbiamo due cose che variano insieme, perchè se due lati di un triangolo rimangono costanti, il terzo lato varia al variare dell'angolo opposto; cresce cioè col crescere di quest' angolo e diminuisce al diminuire dello stesso.


Fig. 42.

Avrà forse luogo quella legge tanto semplice per la quale se l'angolo diventasse doppio, triplo, ecc. anche il lato opposto dovrebbe diventar doppio, triplo, ecc.? È facile vedere che questa legge tanto semplice non si verifica neppure in questo caso. Infatti nella figura qui contro abbiamo fatto eguali tutti gli angoli in *c* e così pure tutti i lati A: se la legge sovra enunciata avesse luogo dovrebb'essere C' od *a'* *b* doppio di C, C'' od *a''* *b* triplo di C, C''' od *a'''* *b* quadruplo di C., ecc., ecc., perchè questi lati sono opposti agli angoli rispettivamente doppio, triplo, quadruplo, ecc., dell'angolo *b c a* che è opposto al lato C; ma è facile convincersi che ciò non si verifica, poichè C' è più piccolo del doppio di C; C'' è ancor più piccolo del triplo di C, ecc.

CAPITOLO SESTO.

Linee parallele. — Parallelogrammo. — Variazioni degli angoli quando i lati non cangiano. — I lati opposti e gli angoli opposti sono eguali. — Parallelo. — Diagonale. — Rettangolo. — Diverse proprietà del parallelogrammo.

54. Prendiamo quattro listerelle di carta a due a due eguali fig. 43, cioè A eguale ad A' e B eguale a B' e formiamo con queste un quadrilatero (fig. 44) per modo che i lati eguali siano opposti l'uno all'altro e possano ruo-

tare intorno ai vertici press'a poco come le lame della forbice ruotano intorno al chiodetto che le unisce. Noi vediamo che in tal guisa il quadrilatero può assumere svariatissime forme come ce ne offre un esempio la fig. 45 [1].

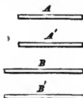


Fig. 43.

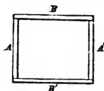


Fig. 44.

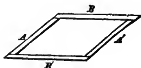


Fig. 45.

Già a prima vista s'intende che, comunque possano variare le rispettive posizioni dei lati, quelli opposti si conservano sempre paralleli. Si potrebbe convincersi del parallelismo dei lati opposti, misurando la distanza di due di questi in differenti punti, perchè si troverebbe che questa distanza è sempre la stessa (Vedi il N. 28); ma ne saremo ancor meglio persuasi dalla seguente dimostrazione geometrica più semplice e più chiara.

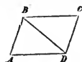


Fig. 46.

Sia ABCD (fig. 46) un così fatto quadrilatero, guidiamo in esso la retta BD: questa retta divide il quadrilatero in due triangoli. Il lato BD è comune ad entrambi questi due triangoli, il lato AB è eguale a CD per la supposizione da noi fatta e così pure il lato BC è eguale ad AD. Per cui i tre lati del primo triangolo sono eguali ai tre lati del secondo triangolo e quindi i due triangoli sono eguali e gli angoli opposti ai

[1] Se riunissimo insieme tre sole listerelle, non sarebbe più possibile questa variabilità della figura, che pur si verifica in tutte le figure di quattro o più lati: ciò s'intende facilmente perchè il triangolo è pienamente determinato quando son dati i suoi lati, ma non così le altre figure (Vedi il N. 20).

lati eguali sono pure fra loro eguali (Vedi il N. 19). Perciò l'angolo DBC è eguale all'angolo BDA e siccome questi due angoli sono alterni rispetto alla trasversale B D (Vedi il N. 29) così le rette B C ed A D devon essere parallele. Così pure dall'eguaglianza degli angoli BDC e DBA segue il parallelismo dei lati A B e C D. Dunque *i lati opposti di questa figura sono paralleli.*

55. La retta B D che nella nostra figura (fig. 46) congiunge due vertici opposti si chiama *diagonale.*

56. Ma se i lati opposti della figura 46 non fossero più a due a due eguali, non avrebbe più luogo l'eguaglianza dei due triangoli e quindi neppure l'eguaglianza degli angoli alterni rispetto alla diagonale, e finalmente non sussisterebbe più il parallelismo in ciascuna coppia di lati opposti; si potrebbe però imaginare una certa posizione dei lati nella quale si avrebbe il parallelismo in una sola coppia di lati opposti, ma non già in tutte e due. E perciò dobbiamo concludere che *i lati opposti sono a due a due paralleli soltanto in quel quadrilatero che ha i lati opposti a due a due eguali.*

57. Questa figura si presenta molto spesso, non solo nella Geometria ma benanco nella vita pratica, e per la sua proprietà caratteristica di avere i lati opposti a due a due eguali prende il nome di *parallelogrammo.* Le porte, le finestre, i pavimenti, le pareti, ecc. sono infatti, solitamente, altrettanti parallelogrammi e d'ordinario sono anzi di quelli che hanno tutti gli angoli retti. Così pure quel semplicissimo istrumento che ciascuno dei nostri lettori conosce sotto il nome di *parallelo* non è in fondo che un'applicazione dell'or considerata proprietà del parallelogrammo. Consiste esso in due regoli A B e C D (fig. 47) congiunti a cerniera ai due pezzi eguali E F



Fig 47.

e GH per modo che le due distanze EH ed FG sono fra loro eguali. Con tale disposizione si può allontanare od avvicinare a piacere i due regoli ed essi si conserveranno sempre paralleli, per cui se facciamo coincidere lo spigolo di uno dei regoli, con una retta disegnata sulla carta, e se disegneremo un' altra retta, seguendo lo spigolo dell'altro regolo, questa seconda retta sarà parallela alla prima. La giustezza di questo strumento dipende, per quanto si è già detto, dalla eguaglianza di EH ed FG e dei pezzi EF ed HG.

58. Il parallelogrammo che più di frequente occorre considerare è quello che ha tutti gli angoli retti; esso chiamasi *rettangolo.*

Che tutti i quattro angoli d'un parallelogrammo debbano essere retti quando sia tale uno solo di essi, è cosa di cui saremo facilmente convinti osservando la proprietà del parallelogrammo, perchè se nel parallelogrammo ABCD, fig. 48, supponiamo che l'angolo B sia retto, ne dovrà venire di conseguenza, per l' eguaglianza dei triangoli ABD e ACD (Vedi il N. 54) che anche l'angolo opposto C è retto; e dippiù anche gli angoli D ed A devono essere retti perchè ciascuno di essi è diviso dalla diagonale in due angoli l'uno dei quali è uno degli angoli di uno dei due triangoli attigui al lato A D, mentre l' altro è eguale all' altro angolo dello stesso triangolo, e questi due angoli presi insieme eguagliano un angolo retto perchè sono due angoli acuti d'un triangolo rettangolo (Vedi il N. 42). Si può ancora osservare che due angoli attigui di un parallelogrammo sono interni fra le parallele dalla stessa parte della trasversale (in tal caso la trasversale è il lato del parallelogrammo comune ai due angoli considerati e le due parallele sono gli altri due lati di questi angoli), epperciò la loro somma è eguale a due angoli



Fig. 48.

retti (Vedi il N. 33). Segue da ciò che se un angolo del parallelogrammo è retto dovrà esser pur tale l'angolo ad esso opposto che lo eguaglia, e dovranno essere retti anche i due angoli che gli sono attigui perchè sommati con esso danno sempre due angoli retti. Ecco quindi un'altra dimostrazione del teorema che se in un parallelogrammo un angolo è retto, devon esser tali anche gli altri tre.

Riassumiamo nelle seguenti proposizioni le varie proprietà del parallelogrammo:

59. *I lati opposti sono fra loro eguali.*

60. *Gli angoli opposti sono pure fra loro eguali.*

61. *La somma di due angoli vicini corrisponde a due angoli retti.*

62. *Ciascuna diagonale divide il parallelogrammo in due triangoli eguali.*

63. *Se uno degli angoli è retto, devon pur essere retti tutti gli altri angoli, in tal caso il parallelogrammo è rettangolo.*

Nota al Capitolo sesto.

Per intendere bene l'applicazione del concetto di dipendenza alle proprietà del parallelogrammo studiate in questo capitolo, proponiamoci il problema di costruire un parallelogrammo quando si conosca il valore di un angolo e quello dei due lati che lo comprendono, per esempio l'angolo A e i due lati A C, A B. Questo problema è semplicissimo, ciascuno vede che basta condurre da C la parallela ad A B e quindi da B la parallela ad A C: la figura così ottenuta è il parallelogrammo richiesto. Ma conviene aggiungere che con quelle stesse tre cose date A B, A C e l'angolo A, non si potrebbe costruire un parallelogrammo diverso da ABCD; affinchè il parallelogrammo possa risultare diverso è necessario variare o tutte e tre le cose date o qualcheduna di esse. E da ciò dobbiamo inferirne che un parallelogrammo è determinato quando se ne conoscono due



Fig. 49.

lati e l' angolo compreso e che per conseguenza devono esistere delle leggi di dipendenza fra le altre parti del parallelogrammo e queste tre.

Or queste leggi sono semplicissime. Il lato C D opposto ad A B varia soltanto col variare di questo; si può far variare l' angolo A e si può anche far variare l'altro lato A C, ma il lato C D resta sempre eguale ad A B. Così il lato B D opposto ad A C dipende soltanto da quest' ultimo e si conserva sempre eguale ad A C. Questa legge di dipendenza, come ben si comprende, è la più semplice di tutte: è quella di due quantità che variano insieme conservandosi sempre eguali. Similmente l' angolo D dipende unicamente dall' angolo A che gli è opposto, perchè esso non cambia punto quando si facciano variare i due lati A C e A B mantenendo inalterato l' angolo A, e anche qui si verifica la stessa legge di dipendenza cioè che questi due angoli A e D variano insieme conservandosi sempre fra loro eguali.

All' incontro gli angoli C e B, vicini ad A, variano bensì al variare del solo angolo A, perchè essi non dipendono punto dai lati A C e A B, ma variano con altra legge; colla legge che se A cresce, B e C diminuiscono, e precisamente nell' istessa misura in cui quello cresce, e viceversa; ed invero ciascuno dei due angoli C e B, è sempre eguale a due angoli retti diminuiti dell'angolo A: legge che già precedentemente abbiamo accennata.

CAPITOLO SETTIMO.

Determinazione della superficie del parallelogrammo. — Decomposizione dei parallelogrammi equivalenti.

64. Sull' istessa retta A D fig. 50 si disegnino parecchi parallelogrammi in modo che i lati superiori B C sieno tutti sopra una medesima retta parallela ad A D: il primo di questi parallelogrammi sia un rettangolo e gli altri assumano posizioni sempre più oblique. Di tali figure si dice che hanno egual *base* ed eguale *altezza*, intendendo

per base il lato comune AD e per altezza la perpendicolare abbassata dal lato superiore BC sopra AD o sul suo prolungamento, la qual perpendicolare è manifesta-

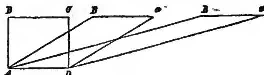


Fig. 50.

mente la stessa per tutte queste figure ed è uguale al lato CD del rettangolo.

Or qual'è, fra queste figure, quella che contiene maggior superficie? Se per esempio ciascuna di esse ci rappresentasse la forma del pavimento d'una stanza, per quale si richiederebbe maggior quantità di tappeto onde coprirne il pavimento? La risposta a questa domanda non sembra molto facile a primo aspetto perchè le figure oblique sono sempre più lunghe e in pari tempo più ristrette.



Fig. 51.



Fig. 52.

Prendiamo un mazzo di carte da giuoco; la figura 51 ci rappresenti una superficie laterale di esso, supponendo che le carte siano l'una all'altra sovrapposte verticalmente. Questa figura sarà manifestamente un rettangolo e la sua superficie dipenderà dal *numero* e dalla *lunghezza* delle carte da giuoco.

Or spostiamo di alcun po' le singole carte di quel mazzo cosicchè l'istessa superficie laterale, dapprima considerata, assuma la forma di un parallelogrammo (fig. 52). Siccome nè il numero nè la lunghezza delle carte hanno punto cambiato, così la nuova figura deve avere la stessa superficie della prima, e ciò per ogni altro consimile spostamento delle carte di quel mazzo.

Ma il numero e la lunghezza delle carte ci rappresentano

l'altezza e la base della figura; epperciò non cangia punto le superficie del parallelogrammo finchè la base e l'altezza non cambiano, ossia, richiamando il paragone di poc'anzi, si richiederà la stessa quantità di tappeto per coprire il pavimento d'ogni singola stanza.

Chiariremo ancor meglio questa conclusione ricorrendo alla dimostrazione seguente:

Le figure 53 e 54 ci rappresentano un rettangolo ed un parallelogrammo di egual base ed eguale altezza. Si divida il parallelogrammo (fig. 54) in tre parti, nel seguente modo: Conducasi sopra E F la perpendicolare F J, si prenda FK eguale ad EJ e quindi si guidi K L perpendicolare a G H. Del pari si divida in tre parti anche il rettangolo (fig. 53), pigliando B M eguale ad F J e quindi D O eguale a G L e guidando le rette A M ed N O.

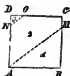


Fig. 53.

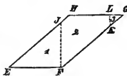


Fig. 54.

Contrasegnate le singole parti ordinatamente con 1, 2, 3, in ambedue le figure, si può dimostrare facilmente l'eguaglianza dei due triangoli 1 e quella dei due triangoli 3, giacchè sì nei primi come nei secondi troviamo eguali due lati e l'angolo compreso. Coll'opportuna suddivisione delle figure 2 si avrebbero nel parallelogrammo tali figure delle quali si troverebbero facilmente le eguali nel rettangolo. Ma raggiungeremo assai più presto il nostro scopo conservando la partizione or fatta e ritagliandone dalla carta le figure: vedremo tosto che, sovrapponendole l'una all'altra, le figure segnate dalla stessa cifra, coincidono perfettamente, e da ciò risulterà che il nostro parallelogrammo ed il nostro rettangolo hanno davvero la stessa superficie.

Tàle decomposizione sarà sempre possibile sebbene in alcuni casi debba essere un po' diversa da quella ora in-

dicata. Consideriamo, p. e., il parallelogrammo molto obliquo della fig. 55 ed il rettangolo della fig. 56 i quali hanno egual base ed eguale altezza: in tal caso non potremo più giungere al nostro scopo adottando la partizione testè adoperata, ma dovremo eseguire una scomposizione in cinque parti; procederemo nel seguente modo:

Conducasi nella fig. 55, come dianzi, F J perpendicolare ad F E, si pigli F K eguale ad E J, si tiri K L parallela ad F J, prendasi K M eguale ad E J, guidisi M N parallela ad F J, si prenda quindi M O eguale ad E J ed infine

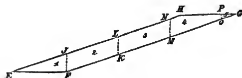


Fig. 55.

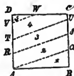


Fig. 56.

si tiri OP parallela ad F J e si denotino le risultanti figure ordinatamente con 1, 2, 3, 4, 5.

Così pure nella fig. 56 si pigli B Q eguale ad F J si guidi AQ, quindi si prenda A R eguale a B Q, si tiri R S parallela ad A Q, si prenda ancora R T eguale a B Q; guidisi TU parallela ad A Q ed infine si pigli T V eguale a B Q, si guidi V W parallela ad A Q e si designino le risultanti figure ordinatamente coi numeri 1, 2, 3, 4, 5.

Già a primo aspetto si vede che le parti del parallelogrammo e quelle del rettangolo segnate colle stesse cifre, sono rispettivamente eguali e del resto si può facilmente convincersene colla sovrapposizione.

Dunque *i parallelogrammi che hanno egual base ed eguale altezza hanno pure la stessa superficie.*

CAPITOLO OTTAVO.

Espressione numerica della superficie d'un parallelogrammo. — Sua decomposizione in quadrati. — I parallelogrammi si possono sempre convertire in rettangoli. — Espressione numerica della superficie d'un rettangolo e di quella d'altre figure.

65. Da ciò che precede abbiamo imparato che la grandezza d'un parallelogrammo ossia la superficie contenuta dai suoi lati dipende unicamente dalla sua base e dalla sua altezza ma non già dalle altre particolarità della sua forma. Questa proprietà ci fornisce un mezzo semplicissimo per determinare la superficie di qualsiasi figura rettilinea.

Fig. 57.

Cerchiamo anzitutto la superficie di un rettangolo fig. 57 il quale abbia p. e. la base A B di tre decimetri e l'altezza A D di cinque decimetri. Rappresentiamo il decimetro colla piccola retta A E, portiamo tre volte questa lunghezza sulla A B e cinque sulla A D segnando i punti di divisione E, F, G, H, J, K.

Segnando le rette E L, F M perpendicolari ad A B, vediamo che il nostro rettangolo riesce partito in altri tre più ristretti AELD, EFML ed FBVM, che sono fra loro eguali, perchè hanno egual base ed eguale altezza.

Ma se dai punti di divisione della A D guidiamo ad essa delle perpendicolari, partiamo ciascuno dei tre rettangoli in altri cinque rettangoli minori: anche questi saranno fra loro eguali perchè tutti hanno la base e l'altezza di un decimetro. Questi ultimi rettangoli che hanno la base eguale all'altezza si chiamano *quadrati;* nel nostro caso in particolare sono *decimetri quadrati* poichè abbiam

supposto che il loro lato sia lungo un decimetro; sarebbero *metri quadrati* se il lato fosse di un metro; ecc.

Dunque il nostro rettangolo che ha la base di tre decimetri e l'altezza di cinque decimetri, contiene 15 decimetri quadrati, perchè esso è decomposto in tre serie verticali di tali quadrati e ciascuna di queste serie ne contiene cinque.

Se il nostro rettangolo ABVD avesse ancora la stessa altezza ma la base fosse di quattro decimetri, allora il rettangolo risulterebbe diviso in quattro liste verticali in ciascuna delle quali si avrebbero ancora cinque decimetri quadrati, epperciò la sua superficie sarebbe di quattro volte cinque ossia venti decimetri quadrati.

Dunque per misurare la superficie d'un rettangolo basta conoscere il numero di metri, decimetri, centimetri, ecc. contenuti nella base e nell'altezza: il prodotto di questi due numeri darà il numero di metri quadrati, decimetri quadrati, centimetri quadrati, ecc., contenuti nel rettangolo. Così, p. e., se la base d'un rettangolo è lunga 10 decimetri e l'altezza è lunga 15 decimetri, esso avrà la superficie di 150 decimetri quadrati.

66. Or sappiamo già che il parallelogrammo contiene la stessa superficie del rettangolo che ha l'egual base e l'eguale altezza; ne risulta quindi che la regola superiore vale eziandio per il parallelogrammo, sia esso rettangolo od obliquangolo. Si avrà quindi *la superficie di un parallelogrammo moltiplicando il numero che ne misura la base per il numero che ne misura l'altezza.* Beninteso che il numero risultante sarà di metri quadrati o decimetri quadrati o centimetri quadrati. ecc., secondo che la base e l'altezza saranno state misurate in metri o in decimetri o in centimetri, ecc.

67. Ricaviamo dal N. 54 che un parallelogrammo può sempre essere diviso in due triangoli; in altri termini, un

triangolo si può sempre riguardare come la metà d'un parallelogrammo avente per base un lato del triangolo e per altezza l'altezza del triangolo (dove per *altezza* del triangolo s'intende la perpendicolare abbassata, sulla base o sul suo prolungamento, dal vertice che gli è opposto). Infatti si può sempre formare un parallelogrammo ponendo accanto ad un triangolo un altro triangolo che gli sia eguale. Epperciò *la superficie d'un triangolo sarà eguale alla metà del prodotto della base per l'altezza.* Se, p. e., la base è di 4 centimetri e l'altezza di 5 centimetri, la superficie del triangolo sarà di 10 centimetri quadrati.

68. Epperò tutti i triangoli che si possono costruire coll'istessa base e coll'istessa altezza, dei quali ce ne dà un saggio la fig. 58, hanno pure la medesima superficie. Per quanto strana possa sembrare a primo aspetto questa conclusione, ove si considerino le diversissime forme di tali figure, pur la possiamo intendere facilmente osservando che le figure più lunghe sono anche le meno larghe, e viceversa.



Fig. 58.

Potrà fors'anche sembrarvi strano che si possa prendere per base del triangolo uno qualunque dei suoi lati, e che tuttavia la superficie risulti sempre la stessa. Ma anche qui ha luogo una compensazione, perchè anche l'altezza del triangolo è diversa quando si sceglie un diverso lato per base: l'altezza più grande corrisponde al lato più piccolo e viceversa. Consideriamo, p. e., il triangolo A B C fig. 59 e cerchiamone la superficie prendendo per base il lato A B,

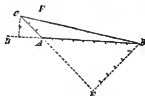


Fig. 59.

che supponiamo lungo nove centimetri, come è indicato dai punti di divisione. Per ottenere la corrispondente altezza prolunghiamo (Vedi il N. 67) a sinistra il lato AB ed abbassiamo da C la perpendicolare CD; quest'altezza C D contiene precisamente due centimetri mentre la base AB ne contiene nove; quindi la superficie del triangolo conterrà la metà di 18 cioè 9 centimetri quadrati. Prendiamo ora per base del nostro triangolo il suo lato AC che è lungo sei centimetri; prolunghiamo questo lato e dal vertice opposto B guidiamovi la perpendicolare B E: questa sarà l'altezza del triangolo corrispondente alla base AC, e misurandola si trova ch'essa è lunga precisamente sei centimetri. Moltiplicando tre per sei e facendo la metà del prodotto si trova, come dianzi, che la superficie del triangolo è di nove centimetri quadrati.

Si otterrebbe ancora lo stesso risultato ove si prendesse per base il terzo lato B C e dal vertice A si conducesse la perpendicolare sopra quel lato, cioè la rispettiva altezza A F; ma in tal caso le due rette (ossia la base B C e l'altezza A F) non conterrebbero più, come nei casi precedenti, un numero esatto di centimetri; ma tuttavia la metà del prodotto dei due numeri ci darebbe ancora nove.

69. Siccome ogni figura chiusa da linee rette si può decomporre in triangoli (Vedi N. 43 e seguenti), così or che sappiamo determinare la superficie d'un triangolo, saremo eziandio in grado di trovare la superficie di qualsiasi figura rettilinea riunendo insieme le superfici dei diversi triangoli che la compongono. È questa una nuova conferma di quanto abbiamo già detto, cioè dell'importanza di ben conoscere la natura del triangolo prima di incominciare lo studio delle altre figure.

70. Un *quadrato*, come abbiam veduto al N. 65, è un rettangolo tutti i lati del quale sono fra loro eguali. Dunque se, p. e., la base di un quadrato è di cinque centimetri,

anche la sua altezza sarà di cinque centimetri e il quadrato conterrà cinque volte cinque, cioè venticinque centimetri quadrati. Dunque per trovare la superficie d'un quadrato basta moltiplicare per sè stesso il numero di metri, decimetri, centimetri, ecc., che dà la misura del lato; il prodotto risultante, darà il numero di metri quadrati, decimetri quadrati, centimetri quadrati, ecc., contenuti nel quadrato.

È questo il motivo per cui nell'Aritmetica si chiama *quadrato d'un numero il prodotto di questo numero per sè stesso.* Così i numeri 4, 9, 16, ecc. si chiamano i quadrati dei numeri 2, 3, 4, ecc., perchè, se questi son la misura del lato d'un quadrato, quelli danno la misura della sua superficie.

Nota ai capitoli settimo e ottavo.

Osserviamo in primo luogo che la proposizione sviluppata nel capitolo settimo è il risultato d'un processo già altra volta indicato. Considerando un parallelogrammo vediamo che la sua superficie varia al variare della base e dell'altezza e possiamo dapprincipio dubitare ch'essa varii ancora al variare della sua forma particolare cioè della sua maggiore o minore obliquità. Per riconoscere come stia la cosa faremo variare questa obliquità lasciando inalterata tanto la base quanto l'altezza ed esamineremo se la superficie varia oppure si mantiene semprecostante. Vedremo allora che i parallelogrammi più lunghi sono anche i più ristretti e viceversa, potremo quindi supporre che vi sia la compensazione, che cioè la superficie sia realmente la stessa in tutti quei parallelogrammi; quindi con ulteriore indagine potremo assicurarci che questo supposto è proprio vero, vale a dire che tutti i parallelogrammi di egual base e di eguale altezza hanno pure la stessa superficie. Da ciò concludiamo: la superficie d'un parallelogrammo dipende soltanto dalla sua base e dalla sua altezza; ossia deve sussistere una tal legge di dipendenza fra queste tre quantità che date due, p. e., la base e l'al-

tezza, si deve essere in grado di determinare la terza, cioè la superficie.

Per trovare questa legge di dipendenza converrà considerare un parallelogrammo di forma particolare nel quale essa possa determinarsi con maggior facilità. Ora è manifesto che tale parallelogrammo è il rettangolo, perchè, una volta conosciuto il numero d'unità di lunghezza contenute nella base e nell'altezza, si può tosto precisare il numero dei quadrati, aventi per lato quest' unità, che sono contenuti nel rettangolo, vale a dire la sua superficie. Ora questo numero è sempre eguale al prodotto dei due numeri che misurano la base e l' altezza; e perciò la legge di dipendenza è subito determinata per tutti i parallelogrammi: la superficie è sempre eguale al prodotto della base per l' altezza (Beninteso che quando si dice superficie s'intende il numero d'unità quadrate: metri quadrati, decimetri quadrati, ecc., contenuti in quella figura e quando si dice prodotto della base per l'altezza s'intende il prodotto dei due numeri di metri, decimetri, ecc., che misurano queste rette).

Esprime questa legge che una quantità è sempre eguale al prodotto d' altre due, ossia che, mantenendo invariata (*costante*) una di queste due e duplicando, triplicando, ecc., l'altra, anche la prima quantità diventa doppia, tripla, ecc. Così, p. e., lasciando costante l'altezza di un rettangolo, la sua superficie crescerà al crescere della base, e precisamente con questa legge che se la base diventa doppia, tripla, ecc., anche la superficie del rettangolo diventerà doppia, tripla, ecc. Questa legge si suol esprimere dicendo che i rettangoli che hanno la stessa altezza stanno fra loro come le basi. È la legge semplicissima alla quale abbiamo già accennato altrove: quella stessa per la quale varia il prezzo di una merce al variare del suo peso.

Dal N. 70 impariamo a conoscere un' altra legge molto importante. La superficie di un quadrato cresce al crescere del suo lato: se il lato diviene doppio la superficie diviene quadrupla, se il lato diviene triplo la superficie diviene nove volte più grande, ecc. Questa è la legge dei *quadrati* che incontreremo pure in altre occasioni.

CAPITOLO NONO.

Rimarchevole proprietà del triangolo rettangolo. — I quadrati dei due cateti presi insieme formano il quadrato dell' ipotenusa. — Varie dimostrazioni di questo teorema. — Composizione del quadrato d' una retta divisa in due parti. — Di quanto il quadrato di tutta la retta supera i quadrati delle sue parti?

71. Una delle più belle scoperte della matematica si riferisce ad una proprietà dei quadrati costruiti sui lati di un triangolo rettangolo, proprietà che ora impareremo a conoscere.

Si chiama *ipotenusa* d' un triangolo rettangolo il lato opposto all'angolo retto. Nella figura 60 abbiamo parecchi triangoli rettangoli che han tutti la stessa ipotenusa A B. Si vede che, mentre uno dei due lati variabili A C e B C diminuisce, l' altro lato cresce, e viceversa; ma da ciò non si può già concludere, come in altri casi simiglianti, che la somma delle due rette rimanga sempre la stessa.

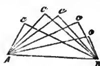
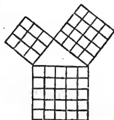


Fig. 60.

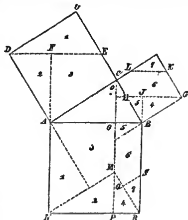
Su ciascuno dei due lati A C e B C, che si chiamano *cateti*, disegniamo un quadrato: allora si troveremo che la somma delle superfici di questi due quadrati si mantiene costante ad anzi eguaglia sempre la superficie del quadrato costruito sull'ipotenusa.

Ritagliamo tre listerelle di carta, una di tre centimetri, un'altra di quattro e la terza di cinque, quindi disponiamole in modo che formino un triangolo: osserviamo allora che l'angolo compreso dai due lati più piccoli è un angolo retto e che per conseguenza il triangolo è rettangolo. Ora (fig. 61) i quadrati costruiti sui tre lati sono

rispettivamente di nove, sedici e venticinque centimetri quadrati; epperciò la somma dei quadrati dei due cateti (cioè 9 centimetri quadrati e 16 centimetri quadrati) è proprio eguale al quadrato dell'ipotenusa (cioè 25 centimetri quadrati).


Fig. 61.

Così pure ritagliando tre listerelle lunghe rispettivamente 5, 12 e 13 centimetri, e formando con queste un triangolo, troviamo ancora che l'angolo racchiuso dai due lati più piccoli è retto e che la somma dei quadrati di questi due cateti (cioè 25 centimetri quadrati e 144 centimetri quadrati) eguaglia il quadrato dell'ipotenusa (cioè 169 centimetri quadrati). Già questi due *casi particolari* ci danno un'idea abbastanza chiara della giustezza del nostro teorema. Or vogliamo convincervi che esso è vero *in generale*, epperciò terremo una via simile a quella che ci ha servito a dimostrare una proprietà dei parallelogrammi (Vedi N. 64).


Fig. 62.

Nella figura 62 abbiam disegnato un triangolo rettangolo ABC ed abbiamo poi costruito un quadrato su ciascuno dei tre lati. Dividiamo dapprima il quadrato del cateto A C in tre parti 1, 2, 3, guidando dal punto D la retta DE parallela ad AB e da A la retta A F perpendicolare a DE. Dividiamo quindi il quadrato del cateto BC nelle quattro parti 4, 5, 6, 7, conducendo da G la retta GH parallela ad A B e da B la B J perpendicolare a G H, poscia pigliando G K eguale a

B H e guidando K L parallela a GH ossia ad AB. Finalmente dividiamo anche il quadrato dell' ipotenusa nelle sette parti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, dapprima conducendo la C P perpendicolare ad A B la quale divide il quadrato in due rettangoli, poscia guidando da N la N M parallela ad A C, prolungando la DA fino ad incontrare la NM e del pari la B G fino all'incontro colla O P, e infine prendendo R S eguale a K L e conducendo S Q perpendicolare ad M R.

Or confrontando l'una con l'altra le figure in tal guisa formate, si trova che quelle segnate dall'istessa cifra sono perfettamente eguali fra loro e che per conseguenza, sovrapponendo le figure contenute nei quadrati dei due cateti alle figure corrispondenti nel quadrato dell' ipotenusa, si verifica il perfetto combaciamento, come si può persuadersi facilmente ritagliando tutte le singole parti della fig. 62.

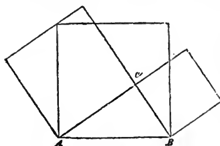


Fig. 63.

In pari tempo riesce manifesto che i due rettangoli formati dalla retta O P sono rispettivamente eguali ai quadrati dei due cateti: cioè il rettangolo A O P N è eguale al quadrato A C U D, e il rettangolo O P R B è eguale al quadrato C B G K.

Tale partizione dei quadrati è sempre possibile, come facilmente si vede; ma in taluni casi il quadrato di B C dovrà essere diviso in più di quattro parti. Perciò esporremo ancora un' altra dimostrazione che vale per qualsiasi caso.

Nella figura 63 abbiamo ancora i tre quadrati costruiti sui lati del triangolo rettangolo A B C, però il quadrato dell'ipotenusa è costruito al disopra anzichè al disotto di

essa per modo che lo stesso triangolo ABC costituisce una parte del grande quadrato.

Ora ritagliamo dalla carta questo triangolo e poniamolo sovra il lato superiore D F del grande quadrato (fig. 64); è chiaro allora che questo quadrato viene trasformato nella figura di sei lati A D E F B C, la quale ha un angolo convesso A C B ed uno concavo D E F, ed ha la stessa superficie del sopraddetto quadrato. Condotta la retta C E, vediamo ch'essa divide questa figura in due parti ciascuna delle quali è un parallelogrammo. Infatti il triangolo DEF è eguale al triangolo ABC epperciò i lati D E ed AC sono eguali e paralleli e così pure i lati BC ed EF; quindi le due figure ADEC, ECBF sono due parallelogrammi. Oltreacciò la D E deve trovarsi sul prolungamento della G H, che è il lato superiore del quadrato di A C, e la E F deve trovarsi sul prolungamento della K J che è il lato superiore del quadrato di BC. Il parallelogrammo ADEC ha quindi la stessa base AC e la stessa altezza H C del quadrato ACHG ed ha perciò la stessa superficie di questo quadrato; parimenti il parallelogrammo EFBC ha l'egual base B C e l'eguale altezza C K del quadrato BCKJ, epperciò queste due figure hanno la stessa superficie. Siccome, d'altra parte, questi due parallelogrammi, presi insieme, formano la figura di sei lati, che ha la stessa superficie del quadrato costruito sull'ipotenusa AB, perciò risulta dimostrato generalmente il teorema seguente:

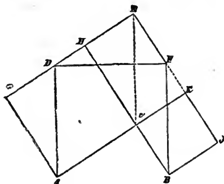


Fig. 64.

In ogni triangolo la somma dei quadrati dei due cateti è eguale al quadrato dell'ipotenusa.

Questo notevolissimo teorema è fecondo di utilissime applicazioni in tutti i rami della matematica. Si crede ch'esso sia stato scoperto, 500 anni all'incirca prima dell'Era Volgare, da Pitagora, il quale, per ringraziare gli Dei che lui vollero scelto a svelare per primo si importante verità, avrebbe loro offerto un olocausto di cento buoi. Ma del resto questo racconto è inverosimile perchè nella scuola Pitagorica erano proibiti i sacrificii cruenti, e sembra piuttosto che tale racconto sia stato inventato in tempi posteriori, quando s'incominciava a riconoscere l'alta importanza del teorema.

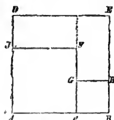


Fig. 65.

72. Sia una retta A B, fig. 65, divisa nel punto C nelle due parti AC e CB, e si costruiscano tre quadrati, uno su tutta intera la linea, gli altri due, rispettivamente sulle due parti di essa. Si scorge a colpo d'occhio che la somma dei due quadrati costruiti sopra AC e sopra CB dev' essere più piccola del quadrato costruito su tutta la retta AB; giacchè se la somma dei due piccoli quadrati dovesse eguagliare il grande quadrato, le due rette AC e BC dovrebbero formare colla AB un triangolo rettangolo nel quale la AB sarebbe l'ipotenusa, il che riescerebbe impossibile, perchè le AC e BC sono a tal uopo troppo corte (Vedi il N. 52).

Or vogliamo indagare più davvicino qual sia la differenza fra il quadrato grande e la somma dei due quadrati piccoli. È manifesto, dalla figura 65, che questa differenza è eguale allo spazio FGHEDJ che appunto rimane se dal quadrato grande si tolgono i due quadrati piccoli. Prolunghiamo ora la FG sino al suo incontro colla DE: veniamo a formare due rettangoli DF e GE che sono

fra loro eguali; perchè GH è eguale a BC e BC è pure eguale a DJ poichè queste due rette sono i residui che rimangono quando dalle due rette eguali AB e AD togliamo le altre due rette eguali AC ed AJ; del pari EH è eguale ad FJ perchè queste due rette risultano togliendo rispettivamente le due eguali BH e BC dalle due eguali BE ed AB; dunque i due rettangoli DF e GE hanno egual base ed eguale altezza. Se osserviamo ancora che i lati costituenti i due rettangoli non sono altro che le due parti AC e BC in cui venne divisa la retta AB, dobbiamo concluderne la seguente proposizione, che è di grandissima importanza in tutto il campo della matematica:

Il quadrato d' una retta AB supera la somma dei quadrati delle sue parti AC e BC del doppio rettangolo formato da queste due parti.

73. Sappiamo da ciò che precede che i quadrati e i rettangoli possono venir espressi in numeri, moltiplicando fra loro i numeri che danno la misura dei loro lati. Epperciò ogni numero, secondo che lo si consideri come il prodotto di due fattori eguali o come il prodotto di due fattori diseguali, può rispettivamente rappresentare la misura di un quadrato o d'un rettangolo. Così ad esempio il numero 12 ci rappresenta la misura d' un rettangolo i cui lati sien misurati dai due numeri 3 e 4, poichè moltiplicando l'un per l'altro questi due numeri, si ottiene appunto 12. Quindi ciò che abbiam poc' anzi stabilito sui *quadrati* e *rettangoli* costruiti sovra certe linee, *vale pure* pei quadrati o *secondo potenze di certi numeri e pei loro prodotti*, vale a dire:

74. Se dividiamo un numero in due parti, il quadrato, o come dicesi anche, la seconda potenza di questo numero è eguale alla somma dei quadrati delle due parti più il loro doppio prodotto.

Se, p. e., dividiamo il numero 10 nelle due parti 7 e 3, abbiamo:

Il quadrato	di	10	. . . . . .	100
»	»	7	. . . . .	49
»	»	3	. . . . .	9
il doppio prodotto di 7 per 3			.	42

e la somma di questi numeri ci dà appunto 100

Così pure dividendo il 12 in due parti: 8 e 4, ovvero 7 e 5, oppure 9 e 3, si trova che la somma dei quadrati delle due parti più il loro doppio prodotto è eguale, in tutti i casi, a 144 che è precisamente il quadrato di 12.

Nota al Capitolo nono.

Crediamo opportune alcune osservazioni sull'importante teorema enunciato in questo capitolo. Osserviamo dapprima che questo teorema stabilisce una relazione fra i tre lati d'un triangolo; perciò, come ben si comprende, uno di questi lati potrà essere determinato ogni qualvolta sieno noti gli altri due; o in altri termini, conoscendo la lunghezza dei due cateti si deve poter calcolare quella dell'ipotenusa, e così pure sapendo quanto son lunghi l'ipotenusa e un cateto si deve poter determinare l'altro cateto. Così, ad esempio, se noi sappiamo che un cateto d'un triangolo rettangolo è lungo 6 metri e l'altro 8 metri, ne concludiamo che il quadrato del primo cateto misura 36 metri quadrati e che il quadrato del secondo cateto ne misura 48; perciò la somma di questi due quadrati è di 100 metri quadrati; ma pel teorema testè svolto sappiamo che la somma dei quadrati dei due cateti è eguale al quadrato dell'ipotenusa; dunque il quadrato dell'ipotenusa dovrà contenere 100 metri quadrati e perciò l'ipotenusa stessa dovrà essere di 10 metri, perchè 10 moltiplicato per sè stesso dà appunto 100.

Il calcolo che dobbiam fare è dunque questo: dobbiamo fare i quadrati dei numeri che misurano i due cateti, e quindi sommarli, avremo così il quadrato dell'ipotenusa; conoscendo il quadrato del-

l' ipotenusa, dobbiamo dedurre quale sia la di lei lunghezza; dobbiamo cioè trovare un numero che moltiplicato per sè stesso riproduca il numero già determinato che esprime la superficie del quadrato. È quest' ultima un' operazione che l' aritmetica insegna ad eseguire in tutti i casi e che è detta *estrazione della radice quadrata*. Così 2 è la radice quadrata di 4, 3 quella di 9, 4 quella di 16, ecc.

Dunque l'ipotenusa dipende dai due cateti con questa legge: essa è sempre eguale alla radice quadrata della somma dei quadrati dei due cateti. Ecco la spiegazione della grande importanza di questo teorema, detto di Pitagora. Ecco un facile esempio di quanto abbiam detto antecedentemente, cioè che la cognizione delle leggi di dipendenza permette di determinare delle quantità incognite.

Ma perchè deve esistere una tal relazione fra i tre lati del triangolo rettangolo, che dati due di questi se ne possa determinare il terzo? A questa domanda facilmente risponderemo ricordando ciò che abbiamo imparato nel Capitolo secondo: ivi abbiamo veduto che un triangolo è sempre determinato quando sono dati due lati e l'angolo che essi comprendono; ora se quest'angolo è retto il triangolo diviene rettangolo e i due lati dati ne sono i cateti; dunque un triangolo rettangolo è determinato quando sono dati i due cateti, epperciò dovrà sussistere una certa dipendenza fra i due cateti e l'ipotenusa, e tale che dati quelli si possa conoscere questa.

È questo un caso particolare di quelle dipendenze accennate nella nota al Capitolo secondo, un caso cioè in cui abbiamo imparato a conoscere una legge di dipendenza della cui esistenza eravamo già dapprima assicurati.

CAPITOLO DECIMO.

Figure simili. — Triangoli simili. — Rapporto dei loro lati. — Rapporto delle superfici dei triangoli simili. — Figure regolari ed irregolari. — Figure disegnate in più grande od in più piccola scala.

75. Uno dei più grandi vantaggi che ci sono offerti dallo studio della Geometria è quello di metterci in grado di paragonare l'una con l'altra due cose che per tutti i riguardi, eccettuatane la grandezza, sono similmente conformate. Per esprimerci con una frase già nota nell'uso comune della vita, cosiffatte cose sono formate *in diversa scala*. Così, p. e., la figura d'un paese sulla carta geografica è perfettamente simile a questo paese e non è altro che una rappresentazione del medesimo *in iscala più piccola*. Ciò significa che le distanze fra i varii punti del paese riescono impicciolite sulla carta geografica, tutte nell'istessa misura.

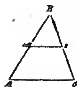


Fig. 66.

Or consideriamo un triangolo ABC fig. 66, dividiamo il suo lato AB in due parti eguali A*a* e B*a* e quindi tiriamo dal punto *a* la retta *ac* parallela ad AC È manifesto che il piccolo triangolo B*ac* che ne risulta ha gli angoli eguali a quelli del triangolo grande ABC, perchè l'angolo B è comune ad entrambi i triangoli, gli angoli in *a* ed in A sono fra loro eguali perchè corrispondenti fra le parallele (Vedi N. 32), e per l'istessa ragione sono fra loro eguali gli angoli in *c* ed in C. Se possiamo inoltre persuaderci che i lati del piccolo triangolo sono tutti nell'istessa misura più piccoli di quelli corrispondenti del grande triangolo, dovremo concludere che i due triangoli in discorso

sono perfettamente simili e diversificano soltanto nella grandezza. Ora il lato B*a* del piccolo triangolo è, per costruzione, la metà del lato AB del grande triangolo; coll'immediata misura si riconosce che anche *ac* è la metà di AC, ed infine che B*c* la metà di BC.

Imaginiamo ora che il lato AB sia diviso in tre parti eguali, anzichè in due, e dal punto di divisione più vicino a B guidiamo, come prima, la parallela *a c* al lato AC: il piccolo triangolo B*ac* che in tal modo risulta, avrà ancora i suoi angoli eguali a quelli del triangolo ABC ed inoltre sarà B*a* la terza parte di AB, *ac* la terza parte di AC e B*c* la terza parte di BC. Somigliante risultato si troverebbe se il lato AB venisse diviso in maggior numero di parti eguali.

Osserviamo che i lati B*a* e AB che si chiamano *corridenti* od *omologhi* sono opposti ai due angoli eguali *c* e C; così pure si dicono omologhi i due lati *ac* e AC che sono opposti entrambi all'angolo B, comune ai due triangoli, e i due lati B*c* e BC opposti agli angoli eguali *a* ed A.

Dunque se gli angoli d'un triangolo sono eguali agli angoli d'un altro triangolo, i due triangoli sono simili, cioè un lato è contenuto nel suo omologo lo stesso numero di volte che un altro lato è contenuto nel suo omologo, o, in altri termini, due lati omologhi hanno sempre lo *stesso rapporto.*

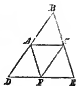


Fig. 67.

76. Si cadrebbe però in grave errore concludendo da ciò, che le superfici di due triangoli simili stanno nel rapporto dei loro lati omologhi, vale a dire, p. e., che la superficie di un triangolo sia doppia della superficie dell'altro quando i lati di un triangolo sono doppii dei loro omologhi nell'altro triangolo.

Per meglio esaminare questo argomento prolunghiamo i lati AB e BC del triangolo ABC, fig. 67, e sui pro-

lungamenti portiamo la porzione AD eguale ad AB e la porzione CE eguale a BC. Quindi condotta la retta D E ne risulterà il triangolo BDE, simile al triangolo ABC, i lati del quale sono doppii dei lati corrispondenti del triangolo ABC. Ma a colpo d'occhio si riconosce che la superficie del triangolo BDE è ben più del doppio di quella del triangolo ABC, perchè è manifesto che la parte aggiunta ACED è ben più grande di ABC. Per trovarne la differenza, dividiamo per metà il lato D E nel punto F e quindi guidiamo le rette AF ed FC. In tal guisa il triangolo BDE riesce decomposto in altri quattro triangoli, che sono eguali ad ABC, come si può dimostrare col ragionamento od anche, più semplicemente, colla sovrapposizione, cioè ritagliando dalla carta la figura 67 e sovrapponendo l'uno all'altro i triangoli che la compongono.

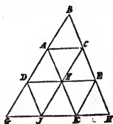


Fig. 68.

Si riconosce in tal guisa che la superficie del triangolo BDE, i cui lati sono *doppii* dei lati corrispondenti del triangolo ABC, è *quattro volte* più grande della superficie di quest'ultimo triangolo.

Prolunghiamo ancora i lati AB e BC fino in G e H, (figura 68), per modo che ciascuno di essi divenga rispettivamente triplo di AB e BC, quindi dividiamo la base GH del nuovo triangolo nelle tre parti eguali GJ, JK, KH e guidiamo le rette DJ, JF, FK e KE; in tal modo abbiamo decomposto il triangolo BGH in nove triangoli tutti eguali fra loro e quindi eguali tutti al triangolo ABC. Dunque il triangolo BGH, i cui lati sono *tre volte* più grandi dei lati corrispondenti del triangolo ABC, ha superficie *nove* volte più grande della superficie di ABC.

Continuando questo processo e prolungando i lati AB ed AC finchè divengono *quattro volte* più grandi, otte-

niamo una nuova serie di triangoli: questi in numero di sette saranno tutti eguali ai primi; aggiungendoli ai nove che già si hanno, si avranno in tutto *sedici* triangoli tutti fra loro eguali ed eguali al triangolo primitivo ABC.

Riassumendo questi risultati vediamo che, se i lati di un triangolo sono doppii, tripli, quadrupli, dei loro omologhi d'un triangolo simile, la superficie del primo triangolo sarà, rispettivamente, quattro volte, nove volte, sedici volte più grande di quella del secondo triangolo. Ma i numeri 4, 9, 16, ecc., sono i quadrati di 2, 3, 4, ecc.; dunque concluderemo:

Le superfici dei triangoli simili stanno nel rapporto dei quadrati dei lati omologhi.

Tale proprietà l'abbiamo già riscontrata nei quadrati (Vedi N. 70), chè ivi abbiamo veduto che la superficie di un quadrato diviene quattro volte, nove volte, sedici volte,... più grande, quando il suo lato diviene rispettivamente doppio, triplo, quadruplo...; epperò le superfici dei triangoli simili, come dice appunto il nostro teorema, crescono colla stessa legge dei quadrati costruiti sui loro lati omologhi.

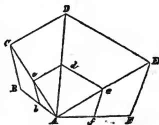


Fig. 69.

Questa proprietà si verifica parimenti, come fra poco vedremo, in tutte le figure rettilinee.

77. Chiamasi *regolare* quella figura rettilinea che ha tutti i lati fra loro eguali e del pari eguali fra loro anche tutti gli angoli. Così ad esempio tanto il quadrato quanto il triangolo equilatero sono figure regolari.

78. È manifesto però che la figura di sei lati ABCDEF, (figura 69), è irregolare. Formiamo ora un'altra figura di sei lati simile alla prima, cioè tale che abbia gli angoli

eguali agli angoli della prima e che i lati sieno, p. e., la metà dei loro omologhi nella prima figura. A tal uopo scomporremo la figura ABCDEF in triangoli, guidando dal punto A le rette AC, AD, AE; divideremo poi il lato AB in due parti eguali nel punto *b* e da questo punto condurremo la retta *bc* parallela a BC, quindi *cd* parallela a CD, *de* parallela a DE ed *ef* parallela ad EF.

I lati della figura risultante A*bcdef*, sono la metà di quelli della prima figura ABCDEF. Infatti il triangolo A*bc*, per la nostra costruzione, è simile ad ABC epperciò *bc* è la metà di BC (Vedi N. 75); del pari il triangolo A*cd* è simile al triangolo ACD e ne risulta che *cd* è la metà di CD; così pure dall'essere simili i due triangoli A*de* e ADE si conchiude che *de* è la metà di DE, e dalla somiglianza dei triangoli A*ef* ed AEF si ricava che *ef* è la metà di EF ed A*f* la metà di A F.

Oltreacciò gli angoli della figura A*bcdef* sono eguali quelli della figura ABCDEF. Infatti l'angolo in *b* è eguale all'angolo in B perchè *bc* e BC sono parallele; l'angolo in *c* è composto di due angoli, che sono rispettivamente eguali agli altri due che formano l'angolo in C, per cui anche l'angolo in *c* è eguale all'angolo in C, ecc.

Dunque la nuova figura di sei lati è simile alla prima, essa è disegnata nella scala di $^1/_2$.

79. Ora in che rapporto stanno le superfici di queste due figure simili?

Il triangolo ABC contiene quattro volte il triangolo A*bc* (Vedi N. 76), così pure ACD è quadruplo di A *c d*, ADE è quadruplo di A*de*, ecc. Da ciò risulta che la superficie della figura ABCDEF è pur essa quattro volte più grande della superficie dell'altra figura A*bcdef* simile ad essa nella scala di $^1/_2$.

È manifesto però che la superficie della piccola figura sarebbe un nono, un sedicesimo, ecc., dell'altra, ov'essa

fosse rispettivamente disegnata nella scala di un terzo, di un quarto, ecc. Vediamo quindi che la proposizione sovra stabilita per i triangoli ed i quadrati (Vedi N. 76) può venir estesa in generale a tutte le figure rettilinee. Dunque:

80. *Le superfici delle figure simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.*

Questo teorema è della più grande importanza per le molteplici sue applicazioni. La dimostrazione che ne abbiamo data, è una nuova conferma dell'opportunità di occuparsi delle proprietà del triangolo, prima d'investigare le proprietà delle altre figure, chè le proprietà di queste risultano con tutta facilità quando si conoscano quelle; perciò appunto, negli Elementi d'Euclide, è assegnato un posto così distinto al triangolo.

81. Le superfici delle figure simili dipendono adunque dai loro lati omologhi, precisamente come i quadrati dipendono dai loro lati. Risulta da ciò che, quanto abbiam sopra dimostrato (Vedi N. 71) intorno ai quadrati costruiti sui tre lati di un triangolo rettangolo, sarà ancor vero in generale per tutte le figure simili costruite su questi tre lati, o in altri termini: costruendo delle figure simili, fra loro, sui tre lati d'un triangolo rettangolo, la somma delle due figure costruite sui due cateti dev'essere eguale alla figura costruita sull'ipotenusa. Così, p. e., disegnando un triangolo equilatero su ciascuno dei tre lati d'un triangolo rettangolo quei tre triangoli *equilateri*, che sono necessariamente simili fra loro, saranno legati dalla relazione seguente: la somma delle superfici dei triangoli costruiti sui cateti, è eguale alla superficie del triangolo costruito sull'ipotenusa.

Nota al Capitolo decimo.

Anche in questo capitolo abbiamo incontrate alcune leggi di dipendenza molto notevoli, già osservate in altro incontro.

Per esprimere queste leggi colla maggior possibile chiarezza, consideriamo un angolo ACB (fig. 70), da un punto A d' un suo lato guidiamo la retta AB che forma colla CA un angolo *dato.* Se imaginiamo che questa retta si muova, avvicinandosi o allontanandosi dal punto C, ma formando pur sempre lo stesso angolo con la C A, ossia mantenendosi sempre parallela a sè stessa, ed assuma le posizioni A'B', A''B'', ecc., vediamo che in questa figura variano insieme le lunghezze CA e CB e che, una volta stabilita la posizione del punto A riesce pure determinata quella del punto B; ne concludiamo che la retta CB dipende dalla CA ed anzi cresce al crescere e diminuisce al diminuire di questa. Dunque deve esistere una legge di dipendenza fra queste due quantità che crescono insieme e diminuiscono insieme: questa legge, come risulta dai teoremi del capitolo decimo, c'insegna che, se la CA diventa doppia tripla, quadrupla, ecc., anche la CB diventa doppia, tripla, quadrupla, ecc. È questa, come abbiamo già osservato altrevolte, una delle più semplici fra le infinite leggi di dipendenza, è quella stessa legge, p. e., che regola il prezzo d'una merce in relazione al suo peso Si suol chiamarla legge della *proporzionalità* e si dice, p. e., che il prezzo ed il peso variano in proporzione o nello stesso rapporto e lo stesso dicesi delle rette CB e CA.

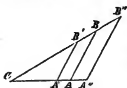


Fig. 70.

Ma al variare di CA varia pure la superficie del triangolo B C A, anche questa cresce al crescere di CA e diminuisce al diminuisce di CA, anche questa è determinata quando è stabilita la CA quando cioè è stabilita la posizione del punto A; dunque anche fra questa superficie e la CA dovrà sussistere una legge di dipendenza. Questa legge però non è più quella di prima; chè se CA diventerà doppia, la superficie del triangolo A B C diventerà quattro volte

più grande; se C A diventerà tripla, la superficie ABC diventerà nove volte più grande, ecc.; dunque la superficie del triangolo ABC dipende dalla CA colla legge dei *quadrati*.

Un esempio molto istruttivo di queste due leggi ci viene offerto dal moto uniforme e dal moto accelerato dei gravi. Nel primo abbiamo il caso d'un corpo che percorre sempre lo stesso spazio in ciascuna unità di tempo, p. e., in un minuto; per cui in due minuti percorre spazio doppio, in tre minuti percorre spazio triplo, ecc.; sicchè fra lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo sussiste la legge della proporzionalità.

È invece moto accelerato quello d'un corpo che cade al suolo in linea verticale, perchè la sua velocità, come tutti sanno, è tanto più grande quanto maggiore è l'altezza da cui il corpo è caduto, o, in altri termini, lo spazio descritto nel secondo minuto è più grande di quello descritto nel primo minuto, lo spazio descritto nel terzo minuto è maggiore dello spazio descritto nel secondo minuto, e via dicendo. Anche in questo moto vi dev'essere una certa legge di dipendenza fra lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo: questa (come pel primo ha dimostrato il nostro Galileo) è la legge dei quadrati dei tempi. Perciò, sapendo che nel primo minuto secondo un grave percorre metri 4, 9 all'incirca, se ne conchiude che in due minuti secondi esso avrà percorso $4.^{m}9 \times 4$; in tre minuti secondi, $4.^{m}9 \times 9$; ecc.

CAPITOLO UNDECIMO.

Applicazioni delle proprietà delle figure simili. — Misurare l'altezza d'un campanile. — Misurare l'altezza d'un monte senza salirvi. — Determinare la distanza dalla luna alla Terra. — Divisione d'una retta in parti eguali. — Determinazione delle minime frazioni di un centimetro. — Proprietà di quattro quantità proporzionali. — Metodo per trovare termini proporzionali.

82. Non v'ha forse in tutto il campo della matematica una teoria più utile di quella testè trattata della somiglianza dei triangoli; tuttavia, in questo volumetto, non possiamo fornire ai nostri lettori che una debole idea dell'alta importanza di questa teoria, esponendo alcuni esempii delle sue innumerevoli applicazioni.

Supponiamo che si voglia determinare l'altezza d'un campanile A B, figura 71, che non si può o non si vuole misurare direttamente, la qual cosa sarebbe del resto molto difficile. A tale scopo s'innalzi, a qualche distanza dal campanile, un bastone verticale D E, sul quale sia collocato un cannocchiale od un semplice traguardo.



Fig. 71.

In tal modo si potrà dirigere una visuale al vertice B del campanile perchè basterà disporre l'asse del cannocchiale od il traguardo in modo che il suo prolungamento passi pel punto B. Imaginiamo ora che la retta ideale che rappresenta questa visuale, sia prolungata dall'altra parte finchè incontri in C

il suolo, che supponiamo perfettamente orizzontale: vediamo allora che ne risultano i due triangoli DEC ed ABC che sono simili fra loro, perchè i due lati D E ed A B sono verticali e perciò fra loro paralleli. Dunque il rapporto di CD a DE è eguale al rapporto di CA ad AB. E siccome CD e DE si possono facilmente misurare, così si potrà determinare facilmente il rapporto delle rette CA ed AB. Se, p. e., eseguita la misura, troviamo che DE è eguale a due terzi di CD, anche AB dovrà essere due terzi di AC; cosicchè, se la AC è lunga 48 metri, il campanile sarà necessariamente alto 32 metri.

Avremo quindi l'altezza del campanile AB, misurando sul terreno la lunghezza CA.

83. In modo consimile si potrà misurare l'altezza d'una montagna; soltanto il metodo dovrà essere un po'diverso

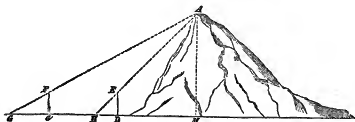


Fig. 72.

perchè, la montagna non permette di riconoscere dove cada la verticale che si può imaginare abbassata dalla vetta del monte, in tal caso non sarà quindi possibile misurare direttamente la distanza GM (fig. 72).

Sia A, fig. 72, il vertice della montagna: stabiliamo nei due punti C e D due bastoni d'eguale lunghezza C F e DE e, per mezzo di cannocchiali o traguardi collocativi sopra, dirigiamo due visuali al punto A. Imaginiamo quindi prolungate queste visuali fino ai punti G ed H nei quali incontrerebbero il suolo: in tal modo vien formato, ideal-

mente, il triangolo GAH la cui altezza A M è la cercata altezza della montagna.

Per trovare quest'altezza misuriamo la G H e disegniamo (fig. 73) una retta K L la quale, p. e., contenga tanti centimetri quanti sono i metri contenuti nella G H; in K formiamo l'angolo N K L eguale all'angolo A G H, e così pure in L l'angolo NLK eguale all'angolo AHG; quindi prolunghiamo KL e dal vertice N abbassiamo sulla base KO, la perpendicolare NO: in tal modo abbiamo formato un triangolo ottusangolo NLK la cui altezza è NO.



Fig. 73.

Per quanto precede, sappiamo oramai che, se due angoli d'un triangolo sono eguali a due angoli d'un altro triangolo, anche i terzi angoli devono essere eguali (Vedi N. 47). Perciò gli angoli del triangolo NKL sono eguali agli angoli del triangolo AGH; quindi questi due triangoli sono simili, per conseguenza il rapporto di GH ad AH è eguale al rapporto di KL ad NL; siccome poi la KL contiene tanti centimetri quanti sono i metri contenuti nella G H, così è manifesto che anche la N L conterrà tanti centimetri quanti sono i metri contenuti nella A H. D'altra parte sono pur simili i due triangoli AHM ed NLO, perchè hanno eguali gli angoli AHM ed NLO e del pari sono eguali gli angoli AMH ed NOL, che sono ambedue retti; per conseguenza anche NO deve contenere tanti centimetri quanti sono i metri contenuti nella AM. Dunque per trovare la richiesta altezza AM della montagna, basta che misuriamo, nel nostro disegno, l'altezza NO: l'altezza A M sarà di tanti metri quanti sono i centimetri contenuti nella NO.

84. Press'a poco nell'istessa maniera gli astronomi determinano la distanza dalla Terra alla luna. Anche di questo problema esporremo qui i punti principali, per quanto lo comporta la natura di questo volumetto.

Sieno A e B, fig. 74, due punti della superficie della Terra, supponiamo pienamente conosciuta, ed espressa in chilometri, la distanza AB fra quei due punti; sia M il centro della luna che dai punti A e B viene osservato nelle direzioni AM e BM. Se da A si dirige una visuale a B ed un'altra ad M, si potrà misurare l'angolo formato da queste due visuali, cioè l'angolo MAB. Nell'istessa maniera si potrà misurare anche l'angolo MBA.

Ciò fatto disegniamo la retta *ab*, fig. 75, la segneremo in modo che contenga tanti millimetri quanti sono i chilometri di AB, quindi guideremo la retta *am* la quale formerà con la retta *ab* un angolo eguale a quello che la AM forma con la AB, e guideremo all'altro estremo *b*, la retta *bm* in modo che faccia con la *ab* un angolo eguale a MBA: Ecco segnato un triangolo *abm* che avrà gli angoli eguali agli angoli del triangolo ABM e che perciò sarà simile a questo triangolo. Quindi (Vedi N. 75) i lati omologhi di questi due triangoli devono avere fra loro lo stesso rapporto; ora sappiamo che la *ab* contiene tanti millimetri quanti sono i chilometri contenuti nella AB; dunque anche la *am* dovrà contenere tanti millimetri quanti sono i chilometri della AM. Perciò basterà misurare il lato *am* della figura 74 per conoscere la distanza dal centro della luna al punto A della superficie della Terra.



Fig. 74.



Fig. 75.

Così dovrebb'essere trattato, in generale, questo problema. Ma qui, per brevità, abbiamo introdotte alcune semplificazioni, che in realtà non si verificano: abbiamo supposto, p. e., che la linea AB sia retta, mentre, la Terra essendo sferica, la linea che ne congiunge due punti deve essere necessariamente curva; dippiù abbiam supposto che dall'uno dei due punti si possa vedere l'altro, il che non potrebbe accadere qualora la loro distanza fosse ap-

pena un po' considerevole, in tal caso per conoscere gli angoli in A ed in B sarebbero necessarie alcune operazioni più complicate. Tuttavia il concetto generale del problema, da noi offerto al Lettore, basterà, lo speriamo, a convincerlo pienamente, che le distanze fra gli astri indicate dagli astronomi, non sono già un parto della loro fantasia, ma bensì il risultato di calcoli esattissimi che nessuno potrebbe mettere in dubbio.



Fig. 76.

85. Ora, una volta conosciuta la distanza dalla luna, vogliamo fare ancora un passo ed imparare a conoscere anche la distanza ben più grande che ci separa dal sole.

Quando la luna è nel suo primo quarto, i centri del sole, della luna e della Terra si trovano nei vertici d'un triangolo rettangolo che ha l'angolo retto nel centro della luna. Questa posizione dei tre astri è rappresentata dalla figura 76, nella quale S rappresenta il centro del sole, E il centro della Terra ed M il centro della luna. Ora da E si diriga una visuale ad S ed un altra ad M, si potrà misurare l'angolo formato da queste due visuali cioè l'angolo MES del nostro triangolo.



Fig. 77.

La distanza dalla luna alla Terra, come avressimo potuto ricavarla effettuando realmente le operazioni precedentemente indicate, è di circa 380,000 chilometri. Guidiamo ora la retta *em* (fig. 77), lunga, p. e., 38 millimetri, per modo che il millimetro ci rappresenti 10,000 chilometri; conduciamo su questa linea *em*, ad angolo retto con essa, la retta *m*S e quindi guidiamo la *e*S che formi con *em* un angolo eguale all'angolo SEM della figura 76. Il triangolo *me*S così formato è simile al triangolo MES e per conseguenza la *e*S deve contenere tante decine di migliaia di chilometri quanti sono i millimetri contenuti nella *e*S. Se vorrete proprio disegnare quel trian-

golo nel modo testè indicato, anche un grandissimo foglio di carta non basterebbe per disegnarvi la figura 77 nella scala poc' anzi indicata. Infatti la distanza dal sole alla Terra è di 136 milioni di chilometri vale a dire 13,600 volte 10,000 chilometri, per cui il lato *e*S, fig. 77, dovrebb'essere lungo 13,600 millimetri cioè più di 13 metri. La scala su cui abbiam disegnato la figura 77 è dunque troppo grande: si dovrebbe, ad esempio, rappresentare col millimetro un millione di chilometri e quindi fare la linea *em* di $^{38}/_{100}$ di millimetro, per ottenere poscia la *e*S di 136 millimetri il che ci darebbe appunto 136 milioni di chilometri per la cercata distanza dal sole alla Terra.

86. La teoria dei triangoli simili può inoltre servire ad uno scopo, già precedentemente accennato, vale a dire alla divisione d'una retta in un certo numero di parti eguali.

Finchè queste parti sono centimetri, millimetri, ecc. si potrà eseguire la divisione mercè un regolo già suddiviso a misura metrica; ma trattandosi invece di dividere una retta d'arbitraria lunghezza in un certo numero di parti eguali, senza badare al rapporto di queste parti con una data unità di misura, converrebbe allora battere un' altra via.

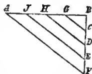


Fig. 78.

Sia per esempio, da dividere la retta A B, fig. 78, in quattro parti eguali. Dal suo estremo B e in direzione arbitraria guidiamo la retta BF e portiamo sovr'essa quattro porzioni d'arbitraria lunghezza, ma tutte fra loro eguali, BC, CD, DE, EF, quindi congiungiamo il punto F col punto A mediante la retta AF e guidiamo le rette EJ, DH, CG parallele ad AF: in tal modo si ottengono quattro triangoli simili, nei quali i lati BC, BD, BE, BF sono fra loro omologhi, e sono omologhi i lati BG, BH, BJ, BA. Siccome poi la BC, è per costruzione il quarto della B F così dovrà

essere BG il quarto di BA; del pari essendo BD la metà di BF dovrà essere BH la metà di BA; così pure, dall'essere BE eguale a tre quarti di BF, si concluderà che BJ è tre quarti di BA. Ecco adunque trovato un modo per dividere la retta data AB in quattro parti eguali AJ, JH, HG, GB.

Allo stesso modo si potrebbe dividere la retta A B in un numero ancor più grande di parti eguali; basterebbe prolungare opportunamente la BF. Riesce perciò manifesto che, dovendo dividere una piccola retta in un gran numero di parti eguali, converrebbe far molto lunga la retta BF.

87. In questi casi riescirebbe più comodo un altro metodo che ora esporremo. Debbasi ad esempio dividere la piccola retta BC in dieci parti eguali (fig. 79): si condurrà la retta BA perpendicolare a BC, su questa BA si porteranno 10 parti fra loro eguali, però d'arbitraria lunghezza, B9; B8; B7, ecc., quindi si congiungerà l'estremo A di quella perpendicolare col punto C e da ciascuno dei punti di divisione 1, 2, 3, ecc. si guiderà una parallela alla retta B C. In tal guisa si formano dieci triangoli simili i cui lati omologhi hanno quindi fra loro lo stesso rapporto; così, p. e., il lato A1 del piccolo triangolo A11' sarà un decimo del lato AB del triangolo ABC e similmente il lato 11' sarà un decimo di B C; parimenti sarà A2 due decimi di AB e 22' due decimi di BC e via dicendo. Ecco determinate le lunghezze di $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, ecc., della retta BC, ecco dunque effettuata la richiesta partizione.


Fig. 79.

88. Quattro rette A, B, C, D, (fig. 80) si dicono *proporzionali* o *in proporzione*, se le due prime hanno fra loro lo stesso rapporto delle due ultime, cosicchè, p. e., se A è lunga due terzi di B, anche C dev'essere lunga

due terzi di D, per modo che se quelle quattro rette sono proporzionali lo stesso numero misura sempre il rapporto di due di esse.

89. Quando quattro rette sono proporzionali, si verifica sempre una notevole proprietà: *il rettangolo formato colla prima e coll' ultima è eguale al rettangolo formato colla seconda e con la terza.*

Formiamo infatti questi due rettangoli colle quattro rette A, B, C, D della figura 80: cioè un rettangolo colla base A e l'altezza D (fig. 81) ad un altro rettangolo colla base



Fig. 80.

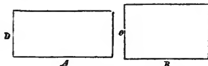


Fig. 81.

B e l'altezza C. Siccome quelle quattro rette sono proporzionali, così è manifesto che la base del primo di quei rettangoli dev'essere tanto più grande della base del secondo quanto l'altezza del primo rettangolo è più piccola dell'altezza del secondo. I due rettangoli hanno dunque la stessa superficie.

90. Il lettore rammenta senza dubbio d' aver imparato dall'aritmetica, che in una proporzione, p. e.:

$$2 : 4 = 6 : 12,$$

il prodotto dei termini estremi 2 e 12 è sempre eguale al prodotto dei termini medii 4 e 6: entrambi quei prodotti sono eguali a 24. Questa proprietà della proporzione corrisponde al teorema geometrico testè dimostrato: perchè coi quattro numeri 2, 4, 6, 12 possiamo appunto rappresentare quattro rette proporzionali ed allora il prodotto dei due termini estremi esprimerà la superficie del rettangolo formato colla prima e l'ultima retta, e il pro-

dotto dei due termini medii esprimerà la superficie del rettangolo formato colla seconda e la terza retta, perciò l'eguaglianza di questi prodotti significherà appunto che le superfici dei due rettangoli sono eguali. Su questa proprietà è fondata la ben nota *Regola del tre*, nella quale d'ordinario sono conosciuti i primi tre termini della proporzione e se ne ricava il quarto moltiplicando il secondo per il terzo e dividendone il prodotto pel primo termine. Questo metodo è ovvio quando si tratta di numeri; ma come si procederà quando in luogo di numeri si avranno delle linee rette? quando ad esempio sieno note le prime tre proporzionali e si voglia determinare la quarta?



Fig. 82.

91. La risposta ci è data dalla considerazione dei triangoli simili: Sieno A, B, C (fig. 82) le tre rette date e si voglia trovare la quarta retta proporzionale. Si formi colle A, B, un triangolo arbitrario (fig. 83), e si costruisca quindi l'altro triangolo, (fig. 84), in modo che i suoi angoli sieno eguali agli angoli del primo triangolo e che un lato di questo nuovo triangolo (fig. 84) sia eguale alla retta data C, badando però che l'angolo opposto a questo lato, sia eguale all'angolo opposto al lato A del primo triangolo (fig. 83). Ora è chiaro che la richiesta quarta proporzionale è precisamente il lato D, del triangolo, testè costrutto (fig. 84), omologo al lato B del primo triangolo (fig. 83). Perchè entrambi i triangoli (fig. 83 e fig. 84), sono simili in virtù dell'eguaglianza dei singoli loro angoli, ed inoltre C è omologo ad A e D è omologo a B, perciò il rapporto del lato A col lato B deve essere eguale al rapporto del lato C col lato D; per conseguenza queste quattro rette sono proporzionali.

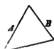


Fig. 83.

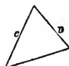


Fig. 84.

CAPITOLO DODICESIMO.

Circolo. — Centro. — Circonferenza. — Raggio. — Gradi. — Quadrante. — Diverse divisioni del circolo. — Divisione dei gradi in minuti e secondi. — Quadratura del circolo. — Impossibilità di un esatto rapporto numerico della circonferenza al diametro. — Circonferenza della Terra. — Determinazione approssimativa della circonferenza d'un circolo. — Come si trova la superficie d'un circolo quando se ne conosce il raggio?

92. È generalmente noto che si dà il nome di *circolo* a quella linea curva che viene descritta dalla punta di un compasso, quando mantenendo ferma una delle sue gambe sopra un punto fisso si fa girare l'altra attorno a questo punto. La linea così descritta si chiama propriamente *circonferenza* o *periferia* del circolo e il punto fisso si chiama *centro* del circolo, denominazione che è molto appropriata perchè manifestamente tutti i punti della circonferenza sono egualmente distanti da questo punto fisso. Questa egual distanza che corre dal centro ad ogni singolo punto della circonferenza, ossia la distanza che separa le due punte del compasso, si chiama *raggio* del circolo.

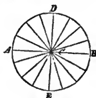


Fig. 85.

Perciò, se la fig. 85 rappresenta un circolo, ADBE è la sua circonferenza, C è il suo centro e ciascuna delle rette eguali CB, CD,.... è un raggio del circolo.

93. Esaminando la figura 85 vediamo intorno al centro molti angoli eguali, ed è chiaro che le parti della circonferenza che vi corrispondono sono pure eguali fra loro. Epperò questi *archi di cerchio* potranno servir molto bene

a misurare gli angoli al centro, perchè questi archi crescono nell'istessa misura in cui crescono gli angoli.

94. In realtà, questo metodo di misurare gli angoli per mezzo degli archi da essi compresi nella circonferenza è pur quello adottato, e, come fra poco vedremo, è immensamente vantaggioso.

Si è convenuto di dividere l'intera circonferenza d'un circolo in 360 parti eguali; ciascuna di queste parti si chiama *grado*. Or s'imagini che dal centro sien condotti 360 raggi, uno ad ogni punto di divisione della circonferenza: ne risultano, disposti intorno al centro, 360 angoli eguali, ciascuno di questi angoli prende pure il nome di *grado*.

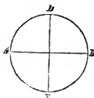


Fig. 83.

95. Risulta dal N. 12 che prendendo insieme tutti gli angoli formati intorno ad un punto, si ottengono quattro angoli retti; perciò un angolo retto deve contenere la quarta parte di 360 gradi cioè 90 gradi.

96. Si chiama *diametro* una retta che passa pel centro ed ha i suoi punti estremi sulla circonferenza. Perciò un diametro è la somma di due raggi che partono dal centro in opposta direzione.

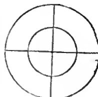
Nella figura 86 abbiamo disegnati due diametri d'un circolo fra loro perpendicolari. Gli angoli al centro, che ne risultano, sono fra loro eguali, perchè ciascuno di essi è retto; quindi anche la circonferenza riesce divisa in quattro parti eguali ciascuna delle quali contiene perciò 90 gradi. Un arco eguale alla quarta parte della circonferenza, cioè un arco di 90 gradi, si chiama *quadrante*.

97. Trovammo al N. 48 che ogni angolo del triangolo equilatero è eguale a $^2/_3$ dell'angolo retto; possiam dunque concludere che l'angolo del triangolo equilatero è di 60 gradi.

98. Siccome un triangolo rettangolo coi cateti eguali ha

gli angoli acuti fra loro eguali (Vedi il N. 22) e siccome questi due angoli acuti presi insieme devono necessariamente formare un angolo retto, così in tale triangolo ciascun angolo acuto sarà eguale a mezzo angolo retto cioè a 45 gradi.

99. La divisione della circonferenza in 360 gradi è affatto arbitraria e se ne potrebbe imaginare un'altra qualunque. Così, p. e., verso la fine dello scorso secolo, si adottò dai geometri francesi, la divisione della circonferenza in 400 parti eguali. Di questi due sistemi di divisione si chiama *sessagesimale* il primo e *decimale* il secondo. Quest'ultimo ha i grandi vantaggi del sistema decimale; l'altro invece è d'uso antichissimo e presenta altri vantaggi che risultano dall'essere il numero 360 divisibile per moltissimi altri numeri: infatti questo numero si può dividere esattamente per tutti i numeri seguenti:


Fig. 87.

2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 48, 60, 72, 90, 120, 180;

dal che risulta la circostanza, molto comoda in pratica, che moltissimi angoli possono venir espressi in numeri interi.

100. Siccome il grado è la novantesima parte del quadrante ed il quadrante, com'è manifesto, ha diverse lunghezze nei circoli di raggio diverso, così anche l'arco di un grado potrà avere ben diverse lunghezze.

Tutti i circoli sono figure fra loro simili. Dunque se il raggio d'un circolo (fig. 87) è doppio del raggio d'un altro circolo, anche la circonferenza del primo sarà doppia della circonferenza del secondo; perciò anche il quadrante dell'uno sarà doppio del quadrante dell'altro ed un grado dell'uno sarà doppio d'un grado dell'altro.

101. Ma ciò vale soltanto per gli archi, non già per gli

angoli. Poichè gli angoli retti sono sempre fra loro eguali, e quindi anche gli angoli che sono la novantesima parte del retto, ossia gli angoli d'un grado, sono sempre fra loro eguali, quand'anche gli archi, da essi compresi in diversi circoli, abbiano diverse lunghezze.

102. Per poter assegnare eziandio la grandezza degli angoli più piccoli d'un grado, si divide questi in 60 parti eguali, ognuna delle quali è detta *minuto*, ed analogamente si divide il minuto in 60 parti eguali ognuna delle quali è detta *secondo*, precisamente nell'istesso modo in cui si suol suddividere l'ora.

I gradi si denotano col segno ° posto al di sopra del numero e alla sua destra, i minuti col segno ′ e i secondi col segno ″. Così, p. e., l'angolo di 45 gradi, 53 minuti e 17 secondi verrà scritto: 45° 53′ 17″.

103. Siccome il rapporto della circonferenza al diametro è lo stesso in tutti i circoli (Vedi il N. 100), così è chiaro che basterà determinare questo rapporto in un circolo qualunque e si potrà quindi assegnare la lunghezza della circonferenza di qualsiasi altro circolo ogni qualvolta ne sarà conosciuto il diametro.

104. Di questo problema si occuparono per molti secoli i più distinti geometri, da esso dipende il famoso problema della *Quadratura del circolo.* Si dà questo nome ad un metodo generale per ricavare il numero preciso di metri quadrati, decimetri quadrati, ecc. contenuti nella superficie del circolo, dato che sia il numero di metri, decimetri, ecc. contenuti nel suo diametro.

105. Si tentò per lungo tempo di esprimere con *tutta esattezza* per mezzo di due numeri, il *rapporto della circonferenza al diametro,* ma tutti i tentativi rimasero vani; finalmente si dovette convincersi che ciò non è possibile e che questo rapporto può essere assegnato soltanto con approssimazione; questo caso ben lungi dall'essere unico

nella geometria si presenta anzi assai di sovente così, p. e., il rapporto del lato di un quadrato alla sua diagonale, il rapporto del lato d'un triangolo equilatero alla sua altezza, non possono essere determinati con tutta esattezza.

106. Tuttavia, se il rapporto della circonferenza al diametro non si può esprimere con tutta esattezza; è bensì possibile avvicinarsi al vero quanto si vuole, assegnando dei rapporti sempre più approssimati. Così, p. e., il rapporto dei due numeri 1 e 3 è poco diverso da quello del diametro alla circonferenza, sicchè la circonferenza è circa tre volte il diametro; ma questi numeri esprimono il richiesto rapporto con poca approssimazione, perchè la circonferenza così calcolata, risulterebbe più piccola del vero, l'errore sarebbe di circa tre ventesimi del diametro, cosicchè, p. e., se il diametro d'un circolo fosse di un metro, la circonferenza non sarebbe già di tre metri (come risulterebbe dal rapporto dei numeri 1 e 3), essa sarebbe invece ben poco diversa da 3 metri e 15 centimetri.

107. Il rapporto della circonferenza al diametro è dato con maggior approssimazione dai due numeri 22 e 7; con questo rapporto si calcolerebbe la circonferenza un pochino troppo grande, l'errore sarebbe all'incirca di un millesimo del diametro; così se il diametro fosse ancora di un metro si avrebbe, con quel calcolo, una circonferenza maggiore del vero, l'errore sarebbe di circa un millimetro. Ancor più esattamente viene espresso questo rapporto dai numeri 333 e 106: con questi due numeri si ottiene la circonferenza minore del vero, la differenza risulta di circa otto centomillesimi del diametro, quindi, nel nostro esempio, di otto centomillimetri soltanto. Si approssimano ancor più i numeri 355 e 113; 103,993 e 33,102 ecc.

108. Limitiamoci ora a considerare il rapporto dei numeri 7 e 22, rapporto che, come abbiamo veduto, è ab-

bastanza approssimato, e cerchiamo di chiarirne l'uso per mezzo d'alcuni esempii.

Questi numeri esprimono chiaramente che il diametro è all'incirca $^{7}/_{22}$ della circonferenza, ossia che la circonferenza è $^{22}/_{7}$ del diametro. Dunque, per trovare la circonferenza quando si conosce il diametro, basta dividere per 7 il numero di metri, decimetri, ecc., contenuti nel diametro, quindi moltiplicare per 22 il quoziente così ottenuto: il risultato darà la lunghezza della circonferenza espressa in metri, decimetri, ecc. Viceversa, per determinare il diametro quando è data la circonferenza, si dividerà per 22 il numero di metri, decimetri, ecc., in essa contenuti, quindi si moltiplicherà il quoziente per 7: il numero risultante sarà la lunghezza del diametro espressa in metri, decimetri, ecc. (1).

La circonferenza della nostra Terra è di 40 000 chilometri; questo numero moltiplicato per 7 dà 280,000 e questo prodotto diviso per 22 dà circa 12,727; dunque il diametro della nostra Terra è di circa 12,727 chilometri.

Il diametro della luna è di 3180 chilometri; dividendo questo numero per 7 e quindi moltiplicandone il quoziente per 22 si ottiene 9994; dunque la circonferenza della luna è di 9994 chilometri.

109. Or che abbiamo imparato a calcolare la circonferenza quando è dato il diametro e viceversa, vogliamo cercar di risolvere l'altro problema: Dato il diametro o la circonferenza del circolo trovarne la superficie.

(1) Chi è pratico nel calcolo decimale ha maggior convenienza facendo uso del numero 3,14159 il quale esprime il rapporto della circonferenza al diametro con maggiore approssimazione del rapporto $^{22}/_{7}$. Moltiplicando il diametro pel numero 3,14159 si ottiene la circonferenza; dividendo la circonferenza per questo numero si ottiene il diametro.

A tale scopo guidiamo dal centro C del circolo, fig. 88, moltissimi raggi a piccolissima distanza l'uno dall' altro. Gli archi da essi tagliati nella circonferenza saranno tanto piccoli che non vi sarà menomamente sensibile la curvatura per modo che si potranno considerare come altrettante linee rette. Ne consegue che l'intero circolo riesce composto d'una moltitudine di triangoli disposti intorno al centro, che naturalmente è il loro vertice comune. Tutti questi triangoli hanno per altezza il raggio del circolo; le loro basi sono i piccoli archetti della circonferenza. La superficie d'uno qualunque di questi triangoli si troverà quindi moltiplicando il raggio del circolo per la metà del rispettivo archetto; per conseguenza la somma di tutti questi triangoli, cioè *la superficie del circolo sarà eguale al prodotto del raggio per la metà della circonferenza,* poichè sommando insieme le metà di tutti gli archetti che compongono la circonferenza ne deve risultare la metà di tutta la circonferenza.

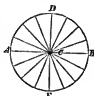


Fig. 88.

Quindi la superficie d'un circolo equivale a quella d'un rettangolo avente per base la mezza circonferenza e per altezza il raggio.

Ciò riesce ancor meglio manifesto se s'imagina che due circoli eguali sieno divisi in un gran numero di triangoli per mezzo di raggi, come nella figura 88, e se invece di ordinarli intorno al centro come in questa figura, si dispongono, come nelle fig. 89 e 90, a guisa d'una sega; riunendo insieme queste due figure in modo che i denti dell'una si incastrino nelle cavità dell'altra, ne risulta evidentemente un parallelogrammo; anzi, poichè gli archi in cui fu divisa la circonferenza sono molto piccoli e quindi gli angoli alla base dei piccoli triangoli sono presso a poco retti, questo parallelogrammo è sensibilmente

rettangolo: la sua altezza è eguale al raggio e la sua base è eguale alla circonferenza. Dunque due circoli eguali presi insieme, formano un rettangolo che ha per base la circonferenza e per altezza il raggio, e per conseguenza un circolo è eguale in superficie ad un rettangolo avente per base la mezza circonferenza e per altezza il raggio, perchè è manifesto che questo rettangolo è la metà dell'altro.

110. Quindi per ottenere la superficie d'un circolo si determinerà prima, la sua circonferenza seguendo il me-

Fig. 89.

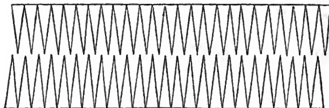


Fig. 90.

todo indicato al N. 108) per mezzo del raggio o veramente del diametro, che è il doppio raggio, quindi si prenderà la metà della circonferenza così calcolata, poi si moltiplicherà questa mezza circonferenza pel raggio: il prodotto sarà la cercata superficie.

Però questo calcolo può essere semplificato, moltiplicando il diametro per sè stesso, quindi dividendone il prodotto per 14 e moltiplicando per 11 il quoziente risultante: il risultato è la richiesta superficie. Chi ha un po'famigliari le considerazioni di questo genere potrà facilmente trovare la ragione di questa regola; noi ci persuaderemo della sua giustezza per mezzo d'un esempio.

Abbiamo veduto al N. 108 che la circonferenza della

Terra è di 40,000 chilometri e che il suo diametro è di circa 12,727 chilometri. Or calcoliamo tanto colla prima quanto con la seconda regola, la superficie di questo circolo, cioè la superficie del circolo che risulterebbe dividendo la Terra, nei suoi due emisferi, con un piano (*sezione*) passante pel di lei centro.

La mezza circonferenza è di 20,000 chilometri, il raggio di circa 6363 chilometri e mezzo, epperciò il prodotto della mezza circonferenza per il raggio, cioè la superficie, risulta di circa 127,270,000 chilometri quadrati.

Colla seconda regola bisogna anzitutto moltiplicare il diametro per sè stesso, cioè nel caso attuale bisogna moltiplicare per sè stesso il numero 12727 s'ottiene così il numero 161.976.529 che va diviso per 14, quindi bisogna moltiplicare per 11 il quoziente risultante: si trova in tal guisa che la superficie di quel cerchio, espressa in numero tondo, è ancora di 127.270.000 chilometri quadrati.

Dunque tutte e due queste regole conducono allo stesso risultato.

I numeri trovati coi due metodi non concordano però perfettamente, chè in ciascuna delle due operazioni abbiam calcolato in numeri rotondi, e, p. e., nelle divisioni non abbiamo avuto alcun riguardo ai resti.

Il primo metodo sembra, in questo caso, più spiccio del secondo, perchè non abbiamo avuto bisogno di calcolare la circonferenza, che era già dapprima conosciuta.

111. Siccome i circoli sono figure simili, così *le loro superfici devono stare fra loro come i quadrati, ossia seconde potenze dei raggi e delle circonferenze.* Ciò risulta pure dalla regola ora esposta per la determinazione della superficie d'un circolo. Sieno, p. e., due circoli di raggio diverso, l'uno abbia il raggio lungo tre metri l'altro abbia il raggio lungo 5 metri. Per ottenere la superficie del

primo circolo, colla regola ora accennata, osserveremo che il suo diametro è di 6 metri; faremo il quadrato di 6, otterremo così il numero 36, e lo moltiplicheremo per $^{11}/_{14}$; la superficie del circolo avente il raggio di 3 metri è quindi eguale a $^{11}/_{14}$ di 36 metri quadrati. Nell'istessa maniera troveremo che la superficie del secondo circolo, avente per raggio 5 metri, è eguale a $^{11}/_{14}$ di 100 metri quadrati. Dunque le superfici di quei due circoli stanno fra loro come 36 sta a 100, ossia come 9 sta a 25, perchè 36 è il quadruplo di 9 e 100 è il quadruplo di 25, e questi due numeri 9 e 25 sono appunto i quadrati di 3 e 5, cioè dei raggi dei due circoli da noi considerati.

Nota al Capitolo dodicesimo.

Anche in questo capitolo abbiamo incontrate due leggi molto importanti: la legge della proporzionalità e la legge dei quadrati.

L'angolo che ha il vertice nel centro d'un circolo cresce al crescere dell'arco compreso fra i suoi lati e diminuisce col diminuire di quest'arco; queste due quantità variano quindi insieme e la loro reciproca dipendenza dev'essere determinata da una legge: questa legge, come abbiamo veduto, è la seguente: all'arco doppio corrisponde l'angolo doppio, all'arco triplo l'angolo triplo, ecc., per modo che l'angolo è proporzionale all'arco.

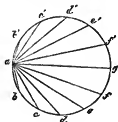


Fig. 91.

Appunto perchè sussiste questa legge della proporzionalità si può prendere l'arco per *misura* dell'angolo. Ma non si potrebbe, analogamente, prendere la corda per misura dell'arco, perchè la corda e l'arco variano insieme con una legge ben diversa da quella della proporzionalità. La figura qui contro (fig. 91) c'insegna, che all'arco doppio non corrisponde la corda doppia, all'arco triplo non corrisponde la

corda tripla, ecc.; infatti gli archi *ab*, *bc*, *cd*, *de*,... sono tutti fra loro eguali, ma la corda *ac* è più piccola del doppio della corda *ab*, la corda *ad* è più piccola del triplo della corda *ab*, ecc. Si può ancora osservare che se l'arco è eguale alla mezza circonferenza la corda corrispondente è la più grande di tutte, diventa cioè un diametro; se poi l'arco continua a crescere e diventa maggiore della mezza circonferenza, la corda che vi corrisponde diminuisce.

Dato che sia il raggio d'un circolo è determinata la lunghezza della circonferenza ed è del pari determinata la superficie del circolo; variando il raggio variano pure la circonferenza e la superficie del circolo. Dunque la circonferenza e la superficie d'un circolo devono dipendere dal raggio con una certa legge. Ora dalle proposizioni del capitolo dodicesimo risulta appunto che la circonferenza d'un circolo dipende dal raggio colla legge della proporzionalità, e che la superficie dipende dal raggio colla legge dei quadrati.

CAPITOLO TREDICESIMO.

Proprietà dei segmenti di cerchio. — Gli angoli inscritti in uno stesso segmento sono eguali. — Gli angoli inscritti nel semicerchio sono retti. — Il quadrilatero inscritto nel circolo. — Angoli inscritti in diversi segmenti.

112. La figura 92 ci rappresenta un *segmento* di circolo, cioè una porzione di circolo compresa fra un arco e la rispettiva *corda*. Su questa corda AB abbiamo posti diversi angoli i vertici dei quali giacciono tutti sulla periferia del segmento, mentre i loro lati passano tutti pei punti estremi A e B della corda. Confrontiamo l'uno coll'altro questi angoli, p. e., ritagliandone uno dalla carta e ponendolo quindi sopra gli altri: troveremo allora che tutti questi angoli sono fra loro eguali. Ciò si verifica per qualunque segmento sia esso grande o piccolo; così, p. e., nella figura 93 abbiamo un segmento alquanto più piccolo di quello della figura 92, ed anche qui possiamo riconoscere che sono fra loro eguali tutti quegli angoli che hanno il vertice sulla periferia mentre i lati passano tutti per le estremità di una corda, però gli angoli segnati nella figura 93 sono più grandi di quelli segnati nella figura 92, infatti nel primo segmento tutti gli angoli sono acuti mentre nel secondo segmento tutti gli angoli sono ottusi; ma conviene osservare che il segmento della fig. 92 è maggiore del semi-

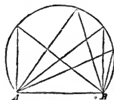


Fig. 92.

circolo, mentre il segmento della figura 93 è minore del semicircolo. Or quale sarebbe la grandezza di questi angoli se il segmento fosse proprio un semicircolo? Disegniamo (fig. 94), un semicircolo, cioè un segmento la cui corda AB passi pel centro e sia quindi un diametro del circolo; costruiamo anche qui parecchi angoli alla periferia i lati dei quali passino tutti pei punti estremi A e B della corda, che nel caso nostro è un diametro: la semplice ispezione della figura ci mostra che questi angoli

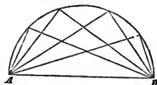


Fig. 93.

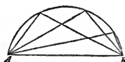


Fig. 94.

sono tutti retti e un più accurato esame ce ne persuade pienamente.

Ci si presentano pertanto tre notevolissime verità.

Prima: Tutti gli angoli che hanno i vertici sull' arco d'un segmento e i lati dei quali passano per le estremità della rispettiva corda, sono fra loro eguali.

Seconda: Quando il segmento è un semicircolo tutti questi angoli sono retti.

Terza: Gli angoli alla periferia i lati dei quali passano per le estremità di una corda sono ottusi od acuti secondo che il segmento è più piccolo o più grande del semicircolo.

Ora daremo la dimostrazione geometrica di questi tre teoremi.

Consideriamo dapprima un semicircolo, figura 95, e da un punto qualunque D della sua circonferenza guidiamo le corde DA e DB: vogliamo dimostrare che l' angolo

ADB è un angolo retto. A tal uopo conduciamo la retta CD che va dal centro C al vertice D dell'angolo ADB; vediamo risultarne due triangoli ACD e BCD, nei quali i lati AC, CD e BC sono fra loro eguali, perchè sono tre raggi dello stesso circolo (Vedi N. 92). Ma sappiamo già che se due lati di un triangolo sono fra loro eguali anche gli angoli opposti a questi lati devono essere fra loro eguali (Vedi N. 22); per conseguenza, nel triangolo ACD l'angolo A è eguale all'angolo ADC, e nel triangolo BCD l'angolo B è eguale all'angolo CDB. L'angolo ADB si compone quindi di due parti, l'una delle quali è eguale all'angolo

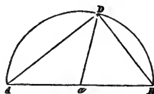


Fig. 95.

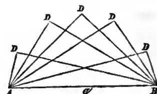


Fig. 96.

A e l'altra è eguale all'angolo B; dunque quest'angolo ADB è eguale alla somma degli angoli A e B; esso è quindi eguale, alla metà della somma dei tre angoli del triangolo ABD, cioè alla metà di due angoli retti, vale a dire ad un angolo retto (Vedi N. 37), come appunto si voleva dimostrare.

E ciò sarà manifestamente vero non solo per l'angolo ADB ma benanco per tutti gli angoli in tal modo inscritti nel semicircolo. Da quanto precede si può anche stabilire la proposizione reciproca: tutti gli angoli retti disegnati sulla medesima retta AB (fig. 96) devono avere i loro vertici nella periferia del semicircolo avente per diametro la retta AB. Della qual cosa si potrà facilmente convincersi dimezzando la retta AB nel punto C, fissando

in C una punta del compasso e facendo muovere l'altra da A verso B: si troverà che la punta del compasso passa precisamente pei vertici di tutti gli angoli retti.

113. Per dimostrare il secondo dei teoremi enunziati nell'introduzione di questo capitolo ci conviene prima studiare altre proprietà degli angoli nel circolo, le quali del resto non sono meno interessanti di quelle testè esposte.

Si dice che *una figura è inscritta in un circolo* quando tutti i vertici di quella figura giacciono nella periferia del circolo.

114. Nella fig. 97 abbiamo un quadrilatero inscritto in un circolo; dal centro del circolo ai quattro vertici del quadrilatero abbiamo condotti quattro raggi, i quali com'è manifesto, partiscono il quadrilatero in quattro triangoli. Siccome ciascuno di questi triangoli ha due lati eguali, perchè raggi dello stesso circolo, così in ciascuno di questi triangoli sono pure eguali due angoli (Vedi il N. 22). I quattro angoli del quadrilatero sono in tal modo divisi in otto angoli e questi si compongono di quattro coppie d'angoli a due a due eguali fra loro. Nella figura 97, gli angoli eguali sono indicati dalla stessa lettera: una coppia con A, un' altra con B, ecc.

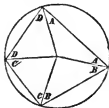


Fig. 97.

Ma, per quanto si è detto al numero 43, i quattro angoli d'un quadrilatero presi insieme formano sempre quattro angoli retti; dunque i nostri otto angoli, segnati con le lettere A, B, C, D, danno la somma di quattro angoli retti; ma gli otto angoli summenzionati contengono due volte i quattro A, B, C, D; epperciò questi quattro angoli A, B, C, D, presi insieme formano la metà di quattro angoli retti, formano cioè due angoli retti.

Or considerando attentamente la disposizione di questi quattro angoli A, B, C, D, si riconosce che essi, presi insieme, compongono sempre due angoli opposti del quadrilatero, perchè un paio di questi angoli opposti è formato dalla riunione di un angolo A con un angolo B e dalla riunione di un angolo C con un angolo D e l'altro paio è analogamente formato dalla riunione di un angolo A con un angolo D e di un angolo B con un angolo C. Dunque *la somma di due angoli opposti d'un quadrilatero inscritto in un circolo è sempre eguale a due angoli retti;* teorema molto importante sul quale più innanzi ritorneremo.

115. Quando due angoli presi insieme formano due angoli retti, ovvero 180°, si dice che l'uno è *supplemento* dell'altro; quando invece la somma di due angoli è eguale ad un angolo retto ossia a 90°, l'uno di essi si chiama *complemento* dell'altro. Il teorema sviluppato nel paragrafo precedente può quindi essere enunciato anche nel seguente modo: *In ogni quadrilatero inscritto nel circolo un angolo è supplemento dell'angolo ad esso opposto.*

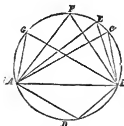


Fig. 9

116. Ora potremo facilmente dimostrare il secondo dei teoremi enunciati al principio di questo capitolo.

Dividiamo un circolo (fig. 98) in due segmenti per mezzo d'una corda AB; in uno di essi inscriviamo l'angolo D e nell' altro gli angoli C, E, F, G. È manifesto che tutti questi angoli C, E, F, G, devono essere fra loro eguali, perchè ciascuno di essi dev' essere il supplemento di D (Vedi il N. 115), o in altre parole ciascuno di questi angoli dev'essere eguale a ciò che manca all'angolo D per formare 180°.

Tutti gli angoli inscritti in un segmento di circolo sopra la medesima corda sono dunque fra loro eguali.

117. Per dimostrare anche il terzo teorema, guidiamo in un circolo (fig. 99) la corda AB, e su questa corda, nel segmento maggiore del semicircolo, inscriviamo l'angolo alla periferia ACB. Guidiamo quindi pel centro il diametro DE parallelo ad AB e su questo diametro costruiamo l'angolo alla periferia DCE che sarà necessariamente retto (Vedi N. 112): la semplice ispezione della figura c'insegna che in questo e in generale *in qualunque segmento maggiore del semicircolo, l'angolo alla periferia è acuto.*

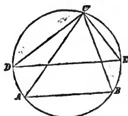


Fig. 99.

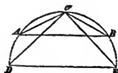


Fig. 100.

118. Finalmente descriviamo un segmento minore del semicircolo (figura 100) ed inscriviamovi l'angolo alla periferia ACB; quindi completiamo il semicircolo, guidiamo il diametro DE parallelo ad AB e su questo diametro costruiamo l'angolo alla periferia DCE il quale, per quanto sappiamo (Vedi N. 112) sarà un angolo retto: l'ispezione della figura basta a renderci persuasi che in questo ed in generale *in qualunque segmento minore del semicircolo, l'angolo alla periferia è ottuso.*

Da ciò che precede si riconosce tosto, che in generale, costruendo, sopra una medesima retta, parecchi angoli fra loro eguali, tutti i loro vertici devono trovarsi sulla periferia di

un segmento di circolo avente per corda quella retta. Del che si può facilmente convincersi ritagliando un angolo dalla carta e muovendolo sopra una retta per modo che i suoi lati passino sempre per gli estremi della retta. Adattando una matita al vertice di quest'angolo, potremo esaminare la traccia lasciata dal movimento di quel vertice e riconosceremo facilmente che la matita ad esso adattata traccia un semicircolo se l'angolo è retto, e ch'essa traccia invece un segmento maggiore o minore del semicircolo secondo che l'angolo adoperato è acuto od ottuso.

CAPITOLO QUATTORDICESIMO.

Corde parallele. — Condurre una tangente. — Corde che s'intersecano. — Figure inscritte e figure circoscritte. — Poligoni regolari inscritti.

119. Nella fig. 101 abbiamo un circolo nel quale vediamo disegnate molte corde fra loro parallele ed un diametro AB perpendicolare a queste corde. Si confrontino, p. e., col compasso, le due parti d'una stessa corda al di qua e al di là del diametro: si troverà che le due parti sono sempre eguali vale a dire che tutte le corde sono dimezzate dal diametro. Della qual cosa si può convincersi eziandio colla seguente dimostrazione geometrica:

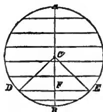


Fig. 101.

120. Dal centro C del circolo guidiamo due raggi CD, CE ai punti estremi di una qualunque DE delle corde: ne risulta allora un triangolo isoscele DCE, perchè CD e CE essendo raggi d'uno stesso circolo, sono fra loro eguali, e in questo triangolo la CF è perpendicolare alla base DE. Or sappiamo dal N. 23 che la base d'un triangolo isoscele è dimezzata dalla perpendicolare guidatavi dal vertice; da ciò concludiamo che il diametro AB divide la corda DE in due parti eguali, e ciò sarà vero per qualsiasi altra corda parallela a DE.

Dunque le corde parallele sono sempre dimezzate dal diametro ad esse perpendicolare.

121. Già più volte abbiamo dovuto condurre dei raggi

dal centro d' un circolo. Or come si troverebbe questo centro quand' esso per caso non fosse conosciuto?

La proposizione stabilita nel paragrafo precedente, ci offre il mezzo di risolvere questo problema. Basta infatti condurre una corda nel circolo di cui si cerca il centro, quindi dividere questa corda per metà ed al suo punto di mezzo innalzarvi la perpendicolare. Prolungando poscia questa perpendicolare, tanto a destra quanto a sinistra della corda finchè incontra, in due punti opposti, la periferia, otteniamo (Vedi il N. 120) un diametro del circolo: il punto di mezzo di questo diametro sarà quindi il richiesto centro del circolo.

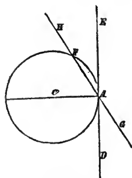


Fig. 102.

122. Si giungerebbe egualmente allo scopo guidando una seconda corda e ripetendo su questa l'operazione testè accennata, guidando cioè, al suo punto di mezzo, la perpendicolare, che sarà per conseguenza un altro diametro del circolo. Siccome il centro del circolo deve trovarsi tanto sul primo quanto sul secondo diametro, così esso dovrà necessariamente trovarsi in un punto comune ai due diametri, e quindi nel punto in cui i due diametri si tagliano.

123. All'estremo A (fig. 102) d'un raggio CA innalziamo su questo la perpendicolare DE: è chiaro che questa retta giace tutta fuori del circolo e lo tocca soltanto nel punto A.

Per dimostrare geometricamente questo teorema, esaminiamo ancora la fig. 27 e supponiamo che in questa figura la AB sia perpendicolare ad AC: in tal modo i triangoli che vi sono formati sono tutti rettangoli e le loro ipotenuse BC, come opposte all' angolo retto, sono

tutte maggiori del cateto AB, che è opposto all'angolo acuto C. *Dunque fra tutte le rette* (fig. 27) *che da un punto* B *si possono guidare alla retta* AC, *la più breve è la perpendicolare* AB.

Applicando ora questa proprietà alla fig. 102 ne risulta che fra tutte le rette condotte dal centro C alla retta DE la più corta è la perpendicolare, cioè il raggio CA. Tutte le altre rette condotte da C sovra DE sono dunque più lunghe della CA, cioè del raggio del circolo, o in altri termini, tutti i punti della retta DE sono fuori del circolo, eccettuatone soltanto il punto A che giace sulla circonferenza.

124. Condotta invece la retta HG obliqua al raggio del circolo, si intende già dalla semplice ispezione della figura che moltissimi punti di questa retta HG giacciono dentro il circolo, cioè sono più vicini al centro che nol sia il punto A.

125. Quando una retta, come la DE (fig. 102) rasenta un circolo toccandolo solo in un punto (come nella nostra figura è il caso nel punto A), si dà a quella retta il nome di *tangente* e il punto A è il suo *punto di contatto.*

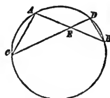


Fig. 103.

126. Dunque per condurre una tangente ad un circolo basta innalzare la perpendicolare ad un raggio nel suo punto estremo.

127. Nella figura 103 abbiamo un circolo ed in esso due corde AB e CD che si incontrano; e ne abbiamo congiunti i punti estremi per modo da formare i due triangoli DEB ed AEC. Gli angoli in E sono opposti al vertice epperciò eguali fra loro. Inoltre sappiamo dal N. 116 che gli angoli alla periferia inscritti nello stesso segmento sono eguali fra loro; perciò gli angoli C e B sono fra loro eguali perchè tutti e due sono inscritti nello

stesso segmento ACBD, avente per corda la AD; così pure sono fra loro eguali gli angoli A e D perchè tutti e due inscritti nello stesso segmento CADB, avente per corda la BC. Gli angoli dell' un triangolo sono dunque eguali agli angoli dell' altro triangolo, epperciò (Vedi il N. 75), questi due triangoli sono simili; in conseguenza il rapporto del lato AE al lato CE è eguale al rapporto del lato DE al lato BE, cioè *i segmenti di due corde che si tagliano sono fra loro proporzionali.*

128. Da ciò segue ancora che il rettangolo delle rette AE e BE è eguale al rettangolo delle rette CE e DE, perchè la base del primo sta alla base del secondo come l'altezza di questo sta all'altezza di quello, e in tal caso sappiamo dal N. 89 che i due rettangoli devono essere eguali.

Dunque se due corde di un circolo si tagliano, il rettangolo formato coi segmenti dell' una è eguale al rettangolo formato coi segmenti dell'altra.

129. Si dice che una figura è *circoscritta* ad un circolo se tutti i suoi lati sono tangenti al circolo.

Rammentando la definizione, che abbiamo data al N. 113, della *figura inscritta*, si vede chiaramente che in un circolo si potrà inscrivere un poligono regolare d'un certo numero di lati dividendo in egual numero di parti eguali la circonferenza del circolo. Così per inscrivere in un circolo un triangolo regolare, cioè equilatero, converrà dividere la periferia in tre parti eguali e congiungere i punti di divisione con linee rette; così pure per inscrivere in un circolo un quadrato, cioè un quadrilatero regolare, si dovrà dividere la circonferenza in quattro parti eguali, quindi congiungerne con rette i punti di divisione; e similmente per le altre figure regolari.

Per dividere la circonferenza d'un circolo in un certo numero di parti eguali si dividerà, p. e., lo spazio che è intorno al centro in egual numero d'angoli eguali: i raggi

che formano i lati di questi angoli determineranno sulla circonferenza i richiesti punti di divisione. La divisione dello spazio intorno al centro potrà essere eseguita con uno strumento misuratore d'angoli, p. e., coll'ordinario rapportatore o *gonimetro.*

Ma in molti casi si può inscrivere una figura regolare in un circolo anche senza l'aiuto di tale strumento, facendo uso soltanto della riga e del compasso, come si rende manifesto per mezzo dei seguenti esempii:

130. Volendo inscrivere un quadrato in un circolo, si guidano due diametri fra loro perpendicolari come l'indica la figura 104: le rette che uniscono i punti estremi di questi diametri formano manifestamente un quadrato; perchè in primo luogo tutti i lati di questa figura sono eguali perchè sono corde d'archi eguali, e in secondo luogo gli angoli sono tutti retti perchè sono angoli alla periferia inscritti nel semicircolo (Vedi il N. 112).

131. Poichè in ogni figura rettilinea sono tanti i lati quanti sono gli angoli, si qualifica indifferentemente una figura tanto dal numero dei suoi lati quanto dal numero dei suoi angoli, si chiama *pentagono* la figura di cinque lati, *esagono* quella di sei, ecc. In generale le figure che hanno più di quattro lati si comprendono tutte sotto il nome generale di *poligoni* (dal greco *poli* molti e *gonos* angoli).

132. Per inscrivere in un circolo un *ottagono* regolare, basta dividere per metà i lati del quadrilatero inscritto (fig. 105), guidare i raggi pei punti di divisione e congiungere i punti estremi di questi raggi coi vertici del quadrato: è chiaro che in tal guisa riesce formato l'ottagono regolare inscritto.

133. Così pure per inscrivere nel circolo un poligono regolare di 16 lati si incomincia ad inscrivervi quello di otto, quindi si dimezzano i lati di quest'ottagono e si guidano

i raggi corrispondenti ai punti di divisione. La circonferenza del circolo verrà in tal modo divisa in sedici parti eguali; congiungendo i punti di divisione a due a due mediante rette si avrà finalmente il cercato poligono regolare, di sedici lati, inscritto nel circolo.

Similmente si procederebbe pei poligoni regolari di 32, di 64, ecc. lati, e in generale per ogni poligono regolare avente doppio numero di lati di un poligono già inscritto.

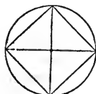


Fig. 104.

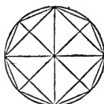


Fig. 105.

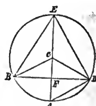


Fig. 106.

134. Per inscrivere nel circolo un triangolo equilatero si condurrà un diametro (fig. 106), si dimezzerà in F il raggio CA e da F si guiderà BD perpendicolare ad AC: i punti B, D, E dividono il circolo in tre parti eguali. Guidiamo infatti le rette CD e AD: essendo F il punto di mezzo di AC, sono fra loro eguali le rette C F ed AF, epperciò nei triangoli CFD ed AFD gli angoli retti sono compresi da lati eguali, quindi (Vedi il N. 17) anche i lati CD e DA devono essere fra loro eguali. Il triangolo CDA è dunque equilatero perchè tutti e tre i suoi lati risultano eguali al raggio del circolo; in conseguenza l'angolo ACD è di 60° (Vedi il N. 97) e per la stessa ragione anche l'angolo ACB è di 60°; dunque la somma di questi due angoli, ossia l'angolo DCB, corrisponde a 120°. D'altronde gli angoli ECD e DCA, presi insieme, formano 180°, epperciò anche l'angolo ECD deve

essere eguale a 120°. Infine, poichè tutti e tre gli angoli BCD, DCE, ECB, presi insieme formano 360°, è chiaro che anche il terzo angolo ECB dev'essere eguale a 120°.

Dunque gli archi BD, DE, EB, nei quali è in tal guisa partita la circonferenza del circolo, sono fra loro eguali, e le rette che ne congiungono i punti di divisione formano in conseguenza un triangolo equilatero inscritto nel circolo.

135. Or che abbiamo in tal modo imparato ad inscrivere in un circolo un triangolo regolare, ci sarà facile, in base a quanto si è detto al N. 133, inscrivervi pur anco un

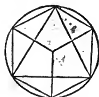


Fig. 107.

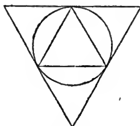


Fig. 108.

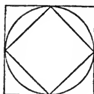


Fig. 109.

esagono regolare, un dodecagono regolare, un poligono regolare di ventiquattro lati, ecc. Così, p. e., nella fig. 107 si è inscritto nel circolo un esagono regolare, incominciando dall'inscrivere nel cerchio un triangolo equilatero, dimezzandone poscia i lati, conducendo i raggi corrispondenti a questi punti di divisione e congiungendo per ultimo, con sei rette, i punti della circonferenza, determinati da questi raggi, coi vertici del triangolo equilatero.

136. Quando sia inscritta in un circolo una figura regolare d'un certo numero di lati, riesce facilissimo il circoscrivere al circolo una figura regolare dello stesso numero di lati. Basta infatti condurre una tangente al cir-

colo per ciascuno dei vertici della figura inscritta. Così nella fig. 108 abbiamo circoscritto al circolo un triangolo equilatero e nella figura 109 vi abbiamo circoscritto un quadrato.

Oltre al circolo v' hanno infinite altre linee curve: la ricerca delle loro proprietà e le loro applicazioni formano gran parte della Geometria superiore. Però, nessuna curva comparisce così di frequente, nè è tanto utile e tanto semplice nelle sue proprietà, quanto il circolo, per cui la geometria elementare non prende in esame alcun'altra linea curva.

CAPITOLO DECIMOQUINTO.

Superficie e corpi. — Piani. — Superfici curve. — Cubo. — Centimetro cubo. — Parallelepipedo. — Sua decomposizione in cubi. — Espressione numerica del volume d'un parallelepipedo.

137. Or vogliamo occuparci delle più importanti proprietà delle superfici e dei corpi.

Nella Geometria si chiama *corpo* ogni spazio racchiuso da superfici: perciò le superfici sono i limiti dei corpi nell'istessa guisa che le linee sono i limiti delle superfici.

Questa parte della Geometria considerata in tutta la sua estensione è una delle più difficili; ma, come abbiamo limitata la teoria delle linee alla retta ed al circolo, così anche delle superfici e dei corpi vogliamo imparare a conoscere soltanto i più semplici, i quali per buona fortuna sono anche i più utili ed i più importanti.

La più semplice di tutte è la superficie piana, o, come si dice in Geometria, il *piano*.

L'imagine più evidente del piano è la superficie d'un'acqua stagnante.

Un piano occupa fra le superfici un posto analogo a quello che la retta occupa fra le linee. Per verificare se una linea è retta, tendiamo un filo da un estremo all'altro di quella linea: se il filo coincide perfettamente colla linea, questa linea è retta; ma se invece il filo si discosta in qualche punto dalla linea, possiamo concludere che essa è curva. Nell'istessa guisa procederemo rispetto ad

un piano. Tenderemo un filo da un punto qualunque di un piano ad un altro punto qualunque di esso; se la superficie è veramente piana, il filo dovrà sempre toccarla in tutti i suoi punti.

Ma non sempre sarà questa una dimostrazione dell'essere piana la superficie di cui si tratta. Così, p. e., se tendiamo un filo da un capo all'altro di un bastone perfettamente rotondo, o se l'avvolgiamo intorno al bastone, il filo potrà toccare interamente, in tutti i suoi punti, la superficie del bastone, e tuttavia è chiaro che questa superficie è curva. Esaminando attentamente la cosa, vediamo che nel primo caso il filo soddisfa alla condizione del contatto soltanto in una determinata posizione, mentre nel secondo caso esso vien teso in guisa tale che cessa di rappresentare una linea retta; è la resistenza del bastone che impedisce al filo di penetrare nel suo interno e lo costringe a circondare il bastone esternamente.

Se dunque il contatto d'una superficie con un filo teso fra due suoi punti, ci deve servir di prova che la superficie è piana, bisogna che il filo tocchi la superficie senza esercitare sovr'essa la più piccola pressione, e ciò non soltanto fra due determinati punti della superficie, ma fra due punti qualsivogliano di essa, scelti del tutto ad arbitrio.

In tal modo giungiamo alla definizione del piano com'è stabilita nella geometria. Infatti ad una superficie si dà il nome di piano, quando è possibile condurre fra due qualunque dei suoi punti una linea retta che giaccia tutta intera nella superficie; proprietà che non si verifica in nessun altra superficie. Così ad esempio sulla superficie del bastone si possono condurre linee rette che vi giacciano interamente, scegliendo opportunamente la posizione dei due punti estremi di quelle singole rette, ma la cosa diventerebbe impossibile quando i punti venissero scelti in

qualsiasi altro modo. Vi sono anzi delle superfici curve sulle quali non si può tracciare alcuna linea retta, tale è ad esempio la superficie d'un uovo.

138. Si vede dunque chiaramente che il piano è la più semplice di tutte le superfici; perciò studieremo anzitutto quei corpi che sono formati unicamente da piani, e piglieremo le mosse dal *cubo* o *dado* rappresentato dalla fig. 110.

139. I piani che limitano un corpo diconsi le sue *facce* e le rette che sono i limiti di questi piani si chiamano gli *spigoli* del corpo.

140. Pertanto un cubo ha sei facce, che sono altrettanti quadrati eguali, e dodici spigoli, del pari tutti eguali fra loro.

Se la lunghezza dello spigolo d'un cubo è d'un centimetro, allora ciascuna delle sue faccie è un centimetro quadrato: in tal caso il cubo si chiama *centimetro cubo*. E similmente se lo spigolo d'un cubo fosse lungo un decimetro, un metro, ecc., il cubo prenderebbe il nome di *decimetro cubo*, *metro cubo*, ecc.



Fig. 110.

Il cubo occupa fra i corpi il posto che il quadrato occupa fra le superfici: come le superfici si misurano per mezzo del quadrato, così la grandezza dei corpi (*volume*) viene misurata in cubi, e si dice, p. e., che il volume di un corpo è di tanti *metri cubi*, *decimetri cubi*, ecc.

Tutti gli angoli che si trovano nel cubo sono retti: in ciascun vertice d'un cubo si riuniscono tre spigoli che a due a due sono sempre ad angolo retto e così pure le facce del cubo si tagliano a due a due sempre ad angolo retto. Il cubo non è l'unico corpo a cui spetta questa proprietà, nell'istesso modo che il quadrato non è la sola delle figure piane che abbia somigliante proprietà. Si danno infatti dei corpi rettangolari con spigoli diseguali nell'i-

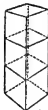
stessa guisa che vi sono rettangoli con lati diseguali. Nella fig. 111 abbiamo sovrapposto l'uno all'altro due cubi eguali: in questo modo abbiamo formato un corpo che, come il cubo della fig. 110, ha tutti gli angoli retti; ma le facce del corpo rappresentato dalla figura 111 non sono tutte quadrate. La faccia superiore e la faccia inferiore sono quadrati, ma tutte le facce verticali (laterali), sono rettangoli, ciascun dei quali è formato da due di quei quadrati.


Fig. 111.

Perciò un corpo come quello rappresentato dalla fig. 111, non conserva il nome di cubo, quel corpo è rispetto ad un cubo quello che è un rettangolo rispetto ad un quadrato.

141. Vi ha una certa classe di corpi che tengono fra questi un posto corrispondente a quello occupato dai parallelogrammi nelle figure piane: tali corpi si chiamano *parallelepipedi.*

Il corpo che abbiamo rappresentato colla fig. 111 è un *parallelepipedo rettangolo.* Poniamo l'uno sull'altro tre cubi eguali, p. e., tre centimetri cubi (fig. 112): ne risulta un corpo che è pur esso un parallelepipedo rettangolo: la sua altezza è di tre centimetri e ciascun lato della sua base è d'un centimetro; cosichè le sue facce laterali sono quattro rettangoli eguali, ciascuno dei quali ha un centimetro di base e tre centimetri d'altezza. In tal modo si potrebbe formare un parallelepipedo rettangolo sovrapponendo l'uno all'altro più cubi eguali, ed è chiaro che la grandezza del corpo, cioè il suo volume, aumenterebbe nella stessa misura dell'altezza: così, p. e., sovrapponendo l'uno all'altro venti centimetri cubi formiamo un parallelepipedo rettangolo la cui altezza è eguale a venti centimetri e la cui base è un centimetro quadrato.


Fig. 112

Poniamo ora l'uno accanto all'altro sei centimetri cubi nel modo indicato dalla fig. 113: risultano così due parallelepipedi rettangoli il cui complesso forma un corpo diverso da tutti quelli finora considerati. La base inferiore e la base superiore di questo corpo sono rettangoli i cui lati sono misurati l'uno da due e l'altro da un centimetro; due delle facce laterali sono rettangoli che hanno per base uno e per altezza tre centimetri, e le altre due facce sono rettangoli aventi per base due e per altezza tre centimetri. La base del corpo contiene due centimetri quadrati e la sua altezza è di tre centimetri. Or moltiplicando fra loro questi due numeri, cioè il numero di centimetri quadrati contenuti nella base pel numero di centimetri contenuti nell'altezza, si ottiene per prodotto sei, che è appunto il numero di centimetri cubi contenuti nel corpo.

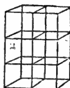


Fig. 113.

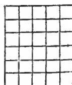


Fig. 114.

Questo processo è del tutto simile a quello già adoperato per determinare la superficie d'un rettangolo moltiplicando la base per l'altezza, ed infatti anche questo processo è valevole in generale, come risulta dalla seguente considerazione.

La figura 114 rappresenta un rettangolo un lato del quale è di 5 centimetri e l'altro di 6: questo rettangolo conterrà perciò 30 centimetri quadrati come si scorge dalla figura.

Se ora, sopra ciascuno di quei centimetri quadrati poniamo un centimetro cubo, veniamo a formare un parallelepipedo rettangolo la cui base è di 30 centimetri quadrati e la cui altezza è di un centimetro, risulta quindi evidente che quel parallelepipedo contiene 30 centimetri cubi.

Sopra ciascuno di questi centimetri cubi poniamone un altro; vedremo risultarne un corpo il quale conterrà 60 centimetri cubi: questo corpo è un parallelepipedo rettangolo avente per base 30 centimetri quadrati e per altezza due centimetri. E così possiamo proseguire per tutti gli altri parallelepipedi rettangoli, perchè è manifesto che ciascuno di questi corpi si potrà in tal guisa decomporre in tanti strati di centimetri cubi quanti sono i centimetri contenuti nell'altezza, mentre ciascuno di tali strati conterrà tanti centimetri cubi quanti sono i centimetri quadrati della base. Pertanto possiamo stabilire la seguente regola per determinare la grandezza, o, come si dice in geometria, il *volume* d'un parallelepipedo rettangolo.

142. *Il volume d'un parallelepipedo rettangolo*, espresso in metri cubi, decimetri cubi, centimetri cubi, ecc., *è eguale al prodotto del numero di metri quadrati, decimetri quadrati, centimetri quadrati, ecc., contenuti nella base, pel numero di metri, decimetri, centimetri, ecc., contenuti nell'altezza.*

Un esempio assai ovvio del parallelepipedo rettangolo, è fornito da una camera dell'ordinaria forma regolare, perchè il soffitto, le pareti e il pavimento sono fra loro ad angolo retto e ciascun vertice è formato da tre angoli retti. Se, p. e., una camera è lunga 6 metri, larga 4 e alta 5 metri essa contiene evidentemente 120 metri cubi perchè la base, cioè in tal caso il pavimento della camera, contiene 4×6 ossia 24 metri quadrati e l'altezza contiene 5 metri, per cui il volume risulta di 24×5 cioè 120 metri cubi.

CAPITOLO SEDICESIMO.

Scomposizione dei parallelepipedi in colonne ed in strati. — Corpi a facce verticali in generale. — Metodo per misnrarne il volume. Prismi. — Cilindri. — Paragone del volume del prisma con qnello del cilindro. — Sezioni di qnesti corpi.

143. Un parallelepipedo rettangolo può essere decomposto tanto in istrati paralleli, come ora abbiam fatto, quanto in colonne verticali. Supponiamo infatti che sopra ciascun centimetro quadrato della base venga eretta una colonna di centimetri cubi la quale ne contenga tanti quanti sono i centimetri contenuti nell'altezza: è chiaro allora che il parallelepipedo conterrà tante di queste colonne quanti sono i centimetri quadrati della base.

Scegliendo per base di ciascuna colonna una superficie più piccola d'un centimetro quadrato, lo stesso parallelepipedo conterrebbe evidentemente un maggior numero di tali colonne. Imaginiamo ad esempio che il parallelepipedo sia formato da tante colonne aventi per base il quadrato di $^1/_{100}$ di centimetro, è chiaro che ciascuna di queste colonne sarà contenuta 10,000 volte in quella a cui prima abbiam data la base di un centimetro quadrato, perchè un centimetro quadrato contiene appunto 10,000 di quei piccoli quadrati che hanno per lato $^1/_{100}$ di centimetro.

Imaginiamo ora un parallelepipedo rettangolo in tal guisa decomposto in moltissime colonne assai sottili. Cambiando l'ordine in cui sono disposte queste colonne pos-

siamo formare un altro corpo a facce verticali, la base del quale sia diversa nella forma, ma eguale in superficie, alla base del parallelepipedo. Così, p. e., se trasformiamo questa base in modo ch' essa divenga un triangolo, il parallelepipedo risulterà trasformato in una colonna verticale e triangolare quale ci viene rappresentata dalla fig. 115. Veramente le facce di questo nuovo corpo non saranno propriamente piane, poichè le facce delle piccole colonne, che compongono il corpo, formano necessariamente delle ineguaglianze; ma quanto più grande sarà il numero delle colonne in cui fu diviso il parallelepipedo tanto più sottile sarà ciascuna di esse e tanto meno sensibili riesciranno le ineguaglianze, che risultano nel loro complesso quando sono poste l' una accanto all' altra; finchè si potrà farle talmente sottili, dividendo il parallelepipedo in un numero assai grande di colonne, che tali ineguaglianze riescano del tutto insensibili e le facce del corpo rappresentato dalla fig. 115 appariscano del tutto piane.



Fig. 115.

Ma nello stesso modo che si è trasformato il parallelepipedo nel corpo triangolare si potrà trasformarlo in qualsiasi altro corpo a facce verticali, purchè si dispongano opportunamente le piccole colonne; e tutti questi corpi avranno la stessa altezza e la base d'egual superficie del parallelepipedo da cui ebbero origine.

Segue da ciò, che il volume di tutti i corpi a facce verticali dipende dalla *superficie della base e dall' altezza*, ma non già dalla diversa forma ch'essi possono assumere.

144. Il teorema stabilito al N. 142, pel parallelepipedo rettangolo è quindi ancor vero per qualsivoglia corpo a facce verticali; perciò si troverà sempre il volume di tali corpi, p. e., in centimetri cubi, moltiplicando il numero di centimetri quadrati contenuti nella base pel numero di centimetri contenuti nell'altezza.

È manifesto che questo teorema si estende pure ai corpi a facce verticali ed a base circolare o curvilinea in generale, e si potrà in conseguenza calcolare la capacità di qualsiasi vaso purchè le sue pareti sien tutte verticali. Convien però osservare che la sopraddetta proposizione è applicabile solo quando si verifica la suesposta condizione; così, ad esempio, essa non potrebbe punto applicarsi ad una botte le cui doghe son rigonfie nel mezzo e quindi non costituiscono altrettante pareti verticali.

145. Ormai siamo in grado di paragonare fra loro le grandezze di corpi a facce verticali per quanto diversa sia la forma delle loro basi. Se, p. e., due corpi cosiffatti avessero le basi d'egual superficie, una delle quali fosse un triangolo e l'altra un quadrilatero, e se l'altezza del primo corpo fosse due terzi dell'altezza del secondo, allora è chiaro che i loro volumi dovrebbero stare nello stesso rapporto delle loro altezze, cioè il volume del primo dovrebb'essere due terzi di quello del secondo.

E se all'incontro fossero eguali le altezze dei due corpi e le basi fossero diverse, è manifesto che i volumi dei due corpi dovrebbero stare nel rapporto delle superfici delle loro basi.

Per cui due corpi a facce verticali e di base diseguale possono avere lo stesso volume qualora la base dell'uno sia più piccola della base dell'altro in quello stesso rapporto in cui l'altezza del primo è più grande dell'altezza del secondo, chè allora quanto l'uno perde nell'altezza lo guadagna nella grossezza e viceversa.

146. I corpi a facce verticali come quelli ora considerati, che nel linguaggio ordinario si chiamano pilastri, si dicono in geometria *prismi retti*, e sono distinti, secondo il numero delle loro facce verticali, in *triangolari*, *quadrangolari*, ecc. La fig. 115 rappresenta quindi un prisma retto triangolare; prismi retti quadrangolari sono i paral-

lelepipedi retti, e, quando la base è un rettangolo, i parallelepipedi rettangoli; un prisma retto quadrangolare, tutte le facce del quale sieno eguali e sieno perciò tanti quadrati, è quello che abbiamo già imparato a conoscere col nome di cubo.

147. Un prisma colla base circolare chiamasi *cilindro* da una parola greca che significa rotolare.

148. Un cilindro è dunque eguale in volume ad un prisma quando abbia la medesima altezza di questo e le basi di questi due corpi contengano la stessa superficie; perciò in tal caso i due corpi diferiscono soltanto per la diversa forma.


Fig. 116.


Fig. 117.

149. Collochiamo ora l'una sull'altra parecchie monete eguali, per modo che formino un *cilindro retto* (fig. 116), e quindi spostiamo un pochino tutte queste monete, tutte però nell'istessa guisa: esse formeranno allora un *cilindro obliquo* (fig. 117). Questi due corpi (fig. 116 e 117) hanno evidentemente egual base ed eguale altezza ed hanno certamente lo stesso volume, perchè le monete impiegate sono sempre le stesse tanto nel cilindro retto (fig. 116) quanto nel cilindro obliquo (fig. 117). Questa osservazione ci conduce ad un notevolissimo teorema di geometria per mezzo del quale la regola testè stabilita per determinare il volume dei prismi retti e dei cilindri può essere estesa eziandio ai corpi obliqui di questa specie, come abbiamo estesa al parallelogramma in generale (Vedi il N. 64) la regola antecedentemente dimostrata pel solo rettangolo. Poichè ciò che ora abbiamo osservato nei cilindri vale pure manifestamente nei parallelepipedi: se, p. e., disponiamo un mazzo di carte da gioco in modo che for-

mino un parallelepipedo rettangolo (fig. 118), allora è chiaro che questo ha lo stesso volume del parallelepipedo obliquo che risulterebbe in seguito ad un' eguale spostamento di tutte le carte in una determinata direzione (fig. 119) o nella direzione opposta (fig. 120), purchè tutti e tre questi corpi sieno formati dallo stesso numero di carte tutte fra loro eguali. Il volume di tali corpi rimane quindi inalterato finchè la base e l'altezza non variano.

150. Tutti i corpi cosiffatti nei quali le facce opposte a due a due sono parallele, vengono compresi sotto il nome generico di *parallelepipedi*, e si distinguono in *retti* ed *obliqui* secondochè quattro facce di essi sono perpendicolari od oblique rispetto alle altre due facce. Cosichè il



Fig. 118



Fig. 119.



Fig. 120.

parallelepipedo *rettangolo*, quale l'abbiamo sopra considerato, è un parallelepipedo retto terminato da tanti rettangoli.

151. Il volume del parallelepipedo è sempre eguale al prodotto della base per l'altezza, intendendosi per *altezza* la perpendicolare abbassata da un punto qualunque della faccia superiore sulla faccia inferiore o sul suo prolungamento.

152. Ritagliando dalla carta delle figure di qualsivoglia forma ma perfettamente eguali fra loro, si può, col sovrapporle l'una all'altra, formare dei prismi retti ed obliqui in tantissime maniere, i quali tutti abbiano egual base, eguale altezza ed egual volume.

153. *Un prisma obliquo è dunque eguale ad un prisma*

retto purchè questi due corpi abbiano egual base ed eguale altezza.

154. La figura che si ottiene tagliando un corpo qualunque con un piano si chiama una *sezione* di quel corpo.

155. Tagliando un prisma, con un piano parallelo alla base, la sezione risultante è una figura simile ed eguale alla base: nel prisma triangolare questa sezione sarà sempre un triangolo eguale a quello che gli serve di base; nel parallelepipedo la sezione sarà un parallelogramma eguale alla base, ecc. Ciò riesce manifesto quando si osservi che questi corpi possono appunto essere formati sovrapponendo l'una all'altra delle figure eguali e simili. Così, p. e., la sezione di un cilindro parallela alla base è sempre un circolo eguale a questa base.

156. *Un prisma ha dunque in tutti i suoi punti egual forma ed egual contorno.*



CAPITOLO DECIMOSETTIMO.

Piramide e cono. — Confronto dei loro volumi. — Piramidi e coni confrontati ai prismi ed ai cilindri.

157. Vedemmo or ora che una sezione parallela alla base d'un prisma è sempre una figura della stessa forma e grandezza della base. Or vogliamo parlarvi di una specie di corpi nei quali le sezioni parallele alla base sono bensì simili a questa, ma di grandezze ben diverse. La figura 121 ci rappresenta un corpo la cui base è il pentagono ABCDE; ogni sezione parallela a questa base è pure un pentagono simile alla base, ma tanto più piccolo in grandezza quanto più è vicino alla sommità P del corpo.

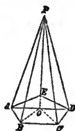


Fig. 121.

Tali corpi chiamansi, in geometria, *piramidi* da un greco vocabolo che significa fiamma, perchè presentano qualche analogia colla fiamma aguzza d'una candela. Secondochè la base d'una piramide è un triangolo, un quadrilatero, ecc., essa viene distinta in piramide triangolare, quadrangolare, ecc. È manifesto che le facce di questo corpo sono tutte piane sicchè un filo teso dalla sua sommità, o, come si dice propriamente, dal suo *vertice* ad un punto qualunque di uno spigolo, tocca sempre in tutti i suoi punti la corrispondente faccia della piramide.

158. Se la base d'una piramide è circolare, il corpo prende il nome di *cono*. In questo adunque le sezioni parallele

alla base sono altrettanti circoli, i raggi dei quali diminuiscono tanto più, quanto più si avvicinano al vertice.

159. Come poc'anzi abbiamo formato un prisma sovrapponendo l'una all'altra delle figure eguali e similmente disposte così è manifesto che per formare una piramide converrà sovrapporre l'una all'altra delle figure simili le quali riescano sempre più piccole. Ma a tal uopo converrà conoscere in qual modo impiccoliscano queste figure all'aumentare della loro distanza dalla base.



Fig. 122.

Per trovare questa relazione guidiamo nella piramide, rappresentata dalla fig. 122, le rette *ab*, *bc*, *cd*, *de* ed *ea* e supponiamo ch' esse sieno prodotte da una sezione parallela alla base: allora è chiaro che la retta *ab* è parallela alla AB, la *bc* alla BC, ecc. Il triangolo P*ab* è quindi simile a PAB, il triangolo P*bc* è simile a PBC, ecc.; cosicchè se P*a* è la metà di PA anche *ab* è la metà di AB, *bc* la metà di BC, ecc. Per cui se la sezione è proprio nel mezzo fra il vertice e la base, i lati di essa sono la metà di quelli della base. E siccome le superfici delle figure simili stanno fra loro come i quadrati dei loro lati omologhi (Vedi il N. 80), così in tal caso la superficie della sezione è un quarto di quella della base.

160. Dunque nella piramide i lati di una sezione parallela alla base sono tanto più piccoli dei lati della base, quanto la distanza dalla sezione al vertice è più piccola della distanza dalla base al vertice.

Epperciò se due piramidi hanno egual base ed eguale altezza le sezioni fatte nell'una e nell'altra ad eguale distanza dal vertice sono fra loro eguali, poichè il rapporto di ciascuna sezione alla rispettiva base dev'essere lo stesso nelle due piramidi. Se, p. e., le sezioni delle due piramidi si trovano entrambe a metà distanza fra il vertice e la

base, allora esse sono un quarto della rispettiva base, e poichè le due basi sono eguali devono essere ancor tali le due sezioni. Teorema importantissimo perchè ci insegna, come fra poco vedremo, che le piramidi d'egual base ed eguale altezza hanno lo stesso volume.

161. Una piramide, come abbiamo già detto, si compone infatti di molte figure l'una all'altra sovrapposte, tutte simili fra loro ma di grandezze sempre più piccole. Imaginiamo ora due lastre di eguale grossezza e di eguale superficie ma di forma diversa, l'una di esse sia ad esempio un triangolo e l'altra sia un quadrilatero, supponiamo però che entrambe abbiano la superficie di 100 centimetri quadrati; a ciascuna di queste lastre sovrapponiamone delle altre della stessa grossezza, simili ad esse ma gradatamente decrescenti nel loro perimetro: otteniamo in tal guisa due piramidi; se per ciascuna di esse abbiamo adoperato lo stesso numero di lastre, le due piramidi avranno eguale l'altezza, perchè questa è data appunto dal numero delle lastre che abbiam supposto debbano tutte avere eguale grossezza; dove per *altezza* intendiamo ancora la perpendicolare abbassata dal vertice della piramide sulla base di essa. Queste due piramidi, come abbiamo supposto, hanno le basi di egual superficie; perciò (Vedi il N. 160) anche le lastre immediatamente sovrapposte alle basi delle due piramidi devono avere egual superficie perchè sono egualmente distanti dal vertice, e lo stesso si può dire per la successiva coppia di lastre e quindi anche per tutte le altre.

Dunque le due piramidi sono formate da un egual numero di lastre le quali a due a due sono eguali; risulta quindi manifesto che quelle due piramidi hanno lo stesso volume.

Sembrerebbe però da questa dimostrazione che le facce delle due piramidi non riescano piane ma risultino foggiate

a gradinate, e che i vertici di esse non sieno veri punti piuttosto piccoli piani. Convien però osservare che il nostro ragionamento sussiste sempre per quanto sia grande il numero delle lastre e per quanto sia piccola la loro grossezza; e perciò nulla ci impedisce di prenderle tanto sottili ed in numero tanto grande quanto vogliamo e quanto occorre per rendere affatto insensibili quelle ineguaglianze delle facce e perchè i vertici appariscano veramente in punta.

Le piramidi di eguale altezza e di egual base hanno dunque lo stesso volume, per quanto sieno diverse nella forma.

162. Nella figura 123 abbiamo disegnato un prisma triangolare la cui base è un triangolo equilatero ABC; le tre facce laterali del prisma sono altrettanti rettangoli eguali fra loro.

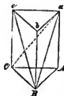


Fig. 123.

Nella faccia laterale AB*ba* tiriamo la diagonale *a*B e nella faccia BC*cb* la diagonale *c*B. Tagliando ora il prisma con un piano passante pel punto B, lungo le rette, testè condotte, veniamo a staccarne una piramide triangolare la cui base *cb*B è la metà d'una faccia laterale del prisma e la cui altezza è la perpendicolare condotta da *a* sopra *cb* o da A sopra CB. Del pari se guidiamo la diagonale *a*C nella terza faccia laterale del prisma potremo ottenere un'altra piramide triangolare facendo un taglio nel prisma pei punti *a*, C, B. Questa piramide, come la precedente, avrà per base la metà *a*BA d'una faccia laterale del prisma e per altezza la perpendicolare condotta da C sopra AB che è uguale all'altezza della prima piramide cioè alla perpendicolare condotta da A sopra CB. Le due piramidi così staccate dal prisma hanno egual base ed eguale altezza ed hanno quindi lo stesso volume.

La restante porzione del prisma è pur essa una piramide triangolare che ha per base la metà *c*CB della faccia *cb*BC del prisma e per altezza la perpendicolare condotta da *a* sopra *cb* o, ciò che torna lo stesso, da A sopra CB, e che per conseguenza è eguale alle due precedenti.

Il prisma è quindi eguale alla somma di queste tre piramidi fra loro eguali, epperciò il suo volume è triplo del volume d'una di queste piramidi.

163. Considerando il triangolo ABC qual base della piramide che ha il vertice in *a*, la sua altezza sarà eguale ad A*a*, epperciò questa piramide ha egual base ed eguale altezza del prisma. Dunque il volume d'una piramide triangolare è sempre la terza parte del volume del prisma che ha la stessa base e la stessa altezza della piramide.

Ma questo teorema vale in generale e non soltanto per le piramidi ed i prismi triangolari; perchè, come vedemmo al N. 153, i prismi d'egual base ed eguale altezza sono eguali in volume qualunque sia poi la loro forma; per conseguenza, un prisma triangolare ha lo stesso volume di qualsiasi altro prisma poligonale purchè abbia la stessa base e la stessa altezza. Dippiù anche una piramide triangolare, come già sappiamo dal N. 161, equivale in volume a qualsivoglia altra piramide poligonale di egual base ed eguale altezza. Epperciò possiamo stabilire il teorema generale:

Se un prisma ed una piramide hanno egual base ed eguale altezza, siano poi essi di qualsivoglia forma, *il volume della piramide è sempre eguale al terzo di quello del prisma.*

164. Da questo teorema si ricava tosto la seguente semplicissima regola per la determinazione del volume d'una piramide: Si moltiplichi il numero di metri, decimetri, centimetri, ecc., dell'altezza, pel numero di metri quadrati, decimetri quadrati, centimetri quadrati, ecc., della base,

e si divida questo prodotto per 3; il quoziente è il cercato volume della piramide espresso in metri cubi, decimetri cubi, centimetri cubi, ecc. Ed invero il prodotto della superficie della base per l'altezza misura il volume d'un prisma avente l'egual base e l'eguale altezza della piramide, epperciò bisogna prenderne la terza parte per ottenere il richiesto volume della piramide.

165. Poniamo ad esempio che l'altezza d'una piramide sia di 6 centimetri e la base di 25 centimetri quadrati, il suo volume sarà di 50 centimetri cubi perchè 6 molti-

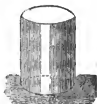

Fig. 124.


Fig. 125.

plicato per 25 dà 150 e dividendo questo numero per 3 si ottiene appunto 50.

166. Siccome il cono è una piramide a base circolare ed il cilindro è un prisma a base circolare, così siamo indotti a supporre che il teorema esposto al N. 163 valga ancora pei coni ed i cilindri, ed infatto è proprio così. Le figure 124 e 125 ci rappresentano l'una un cilindro e l'altra un cono aventi egual base e d'eguale altezza. Se si avessero questi due corpi in metallo od in altra qualsiasi sostanza omogenea, si troverebbe che il cilindro pesa appunto il triplo del cono, e ciò a conferma della verità che, il cono è la terza parte del cilindro d'egual base e d'eguale altezza.

—

CAPITOLO DECIMOTTAVO.

Superficie dei prismi e dei cilindri. — Piramidi regolari. — Le superfici ed i volumi dei cubi e in generale dei corpi fra loro simili non sono proporzionali alla lunghezza dei loro spigoli.

167. Nel precedente capitolo abbiamo imparato a determinare il volume dei prismi e delle piramidi; ora vedremo in qual modo si possa trovare la superficie di questi corpi.

Siccome le facce di questi corpi sono tutte figure piane e rettilinee, come triangoli, parallelogrammi, ecc., di cui già imparammo a determinare la superficie, così è chiaro che si potrà facilmente assegnare le superfici di questi corpi facendo la somma delle superfici di tutte le figure da cui sono terminati. Vi sono però alcune regole che valgono a semplificare quest'operazione e che perciò crediamo opportuno farvi conoscere.



Fig. 126.

La figura 126 ci rappresenta un prisma retto la cui base può essere un poligono qualunque. Le facce laterali di esso sono altrettanti rettangoli tutti di eguale altezza; ciascuno di essi ha per base uno dei lati della base del prisma. Perciò si troverà la superficie di ciascuno di questi rettangoli, moltiplicando l'altezza comune pel corrispondente lato della base. Epperciò, la superficie laterale del prisma, cioè la somma delle superfici di tutte le facce laterali, sarà eguale al prodotto dell'altezza per la somma di tutti i lati della base. Sia, p. e., l'altezza di 10 centimetri e i lati della base sieno ordinatamente di 2, 3, 4, 5, 7 e 9 centimetri; le facce

laterali del prisma saranno sei rettangoli tutti coll'altezza di 10 centimetri e colle basi di 2, 3, 4, 5, 7 e 9 centimetri; questi rettangoli presi insieme avrebbero la stessa superficie di *un rettangolo* avente l'altezza di 10 centimetri e la base di 30 centimetri, ossia di un rettangolo eguale alla somma delle basi dei sei rettangoli laterali; la superficie laterale del nostro prisma è adunque eguale a 300 centimetri quadrati cioè al prodotto dell'altezza, che è di 10 centimetri, pel perimetro della base, che è di 30 centimetri.

Questo processo riesce ancor meglio manifesto avvolgendo intorno al prisma un foglio di carta che ne copra perfettamente la superficie laterale senza presentare nè ripiegature nè sporgenze: è evidente che quel foglio di carta avrà la figura d'un rettangolo la cui altezza sarà quella del prisma e la cui base sarà il perimetro della base del prisma.

168. E lo stesso si può dire riguardo al cilindro, poichè se avvolgiamo intorno ad esso un foglio di carta che ne ricopra esattamente tutta la superficie e poi lo distendiamo in piano, riconosceremo tosto che quel foglio è precisamente un rettangolo la cui altezza è quella stessa del cilindro e la cui base è eguale alla circonferenza del circolo che serve di base al cilindro.

Si trova dunque tanto *la superficie del prisma* quanto quella *del cilindro moltiplicandone l'altezza pel perimetro della base*, avvertendo che intendiamo parlare soltanto della superficie delle facce laterali; la superficie della base e quella della faccia ad essa opposta (base superiore) si troveranno, quando ciò sarà necessario, colle regole già assegnate per le figure rettilinee e pel circolo.

Si voglia sapere, p. e., quanti metri quadrati di tappezzeria saranno necessari per coprire le pareti di una stanza di forma rettangolare, alta 4 metri, ciascun lato della

quale è lungo 5 metri. La risposta è facile, poichè il perimetro della base è di 16 metri e l'altezza è di 5 metri, la superficie richiesta sarà di 80 metri quadrati.

169. Si chiama *piramide regolare* quella piramide che ha per base un poligono regolare (Vedi il N. 131) e gli spigoli laterali della quale sono tutti fra loro eguali. Così la piramide rappresentata dalla fig. 127 è regolare se il poligono ABCDE che le serve di base è un poligono regolare e se in pari tempo gli spigoli laterali PA, PB, PC, PD, PE, sono tutti eguali fra loro. È chiaro che tutti i triangoli che ne compongono la superficie laterale sono fra loro eguali, ciascuno di essi ha per base uno dei lati della base della piramide e per altezza la perpendicolare calata dal *vertice* P sopra *un lato* della base della piramide. Dunque *la superficie della piramide regolare è eguale alla metà del prodotto dell'altezza comune a tutti questi triangoli per il perimetro della base della piramide.*



Fig. 127.

170. Somigliante teorema vale pel cono. Avvolgendovi un foglio di carta che ricopra esattamente la sua superficie curva si riconoscerà che quel foglio di carta ha la figura d'un settore circolare (fig. 128) cioè d'una porzione di circolo compresa fra due raggi e l'arco da essi determinato: il raggio di questo settore è eguale alla distanza del vertice del cono dalla circonferenza della base e l'arco ha lunghezza eguale a quella della circonferenza. Ora la superficie d'un settore circolare si ottiene moltiplicando l'arco che gli serve di base per la metà del raggio; perchè dividendo questo arco in moltissimi archetti piccolissimi e guidando i raggi pei punti di divisione, il settore riescirebbe diviso in

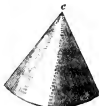


Fig. 128.

moltissimi triangoli che avrebbero tutti per altezza il raggio e le cui basi sarebbero i piccoli archetti componenti l'arco del settore. Dunque:

La superficie del cono è eguale alla metà del prodotto della circonferenza della base per la distanza del vertice da quella circonferenza [1].

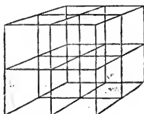


Fig. 129.

171. Poniamo che s'abbia un certo numero di cubetti del lato d'un centimetro e che si voglia con essi formare un cubo il lato del quale sia lungo due centimetri. Ciascuna faccia di questo cubo deve contenere quattro centimetri quadrati, perchè essa è un quadrato il cui lato misura due centimetri, e per formarla fa perciò d'uopo di quattro cubetti da un centimetro. Ora riunendo insieme questi quattro cubetti da un centimetro, ne risulta un parallelepipedo rettangolo la cui base (fig. 129) è un quadrato della richiesta grandezza, la cui altezza però è di un solo centimetro. Dunque affinchè l'altezza di questo corpo sia anch'essa di due centimetri converrà sovrapporre a questo primo strato un secondo strato ad esso eguale, formato con quattro cubetti da un centimetro; in tal guisa si otterrà un corpo, come lo rappresenta la figura 129, cioè un cubo il lato del quale è lungo due centimetri, e che contiene, come abbiam veduto, otto cubetti da un centimetro ciascuno, vale a dire *otto* centimetri cubi.

[1] Come ben si comprende la distanza dal vertice del cono alla circonferenza, che ne limita la base, è data dalla retta congiungente il vertice con un punto qualunque di quella circonferenza, perciò codesta retta trovasi adagiata in ogni suo punto sulla superficie del cono.

Ora quanti centimetri cubi sarebbero necessarii per formare un cubo il lato del quale fosse lungo *tre* centimetri?

La base di questo cubo sarà evidentemente un quadrato il quale dovrà avere la superficie di nove centimetri quadrati; e per formare tale quadrato saranno necessarii nove cubetti da un centimetro. E siccome il cubo che vogliam formare, deve avere l'altezza di tre centimetri così riesce facile il comprendere che saranno necessarii tre strati da nove cubetti ciascuno. Dunque per formare un cubo del lato di tre cen timetri si richiederanno tre volte nove e quindi ventisette cubetti da un centimetro ciascuno, ossia *ventisette* centimetri cubi.

E nell'istessa guisa si procederebbe per qualsiasi altro cubo. Moltiplicando per sè stesso il numero indicante i centimetri contenuti nel lato, si ottiene il numero di centimetri cubi della base, o, ciò che è lo stesso, il numero di centimetri cubi dello strato inferiore. Questi strati poi di centimetri cubi sono tanti quanti sono i centimetri del lato.

172. Raddoppiando o triplicando il lato d'un cubo, il suo volume cresce ben più rapidamente; perchè, come risulta dal N. 171, se il lato è doppio il volume diviene otto volte più grande, se il lato è triplo il volume diviene ventisette volte più grande, e in generale il numero che misura il volume d'un cubo si ottiene moltiplicando *due volte* per sè stesso il numero che ne misura il lato. Il prodotto d'un numero moltiplicato due volte per sè stesso è detto *terza potenza* di questo numero, e per la sopradetta ragione esso prende anche il nome di *cubo* del numero. Così, p. e., 64 è il cubo o terza potenza di 4; 125 è la terza potenza di 5 e così via.

173. Ciò che ora dimostrammo relativamente ai cubi è ancor vero pei corpi simili in generale poichè essi sono

proporzionali ai cubi cui equivalgono. Due prismi simili, p. e., nei quali i lati omologhi sieno nel rapporto di 1 a 2 si possono trasformare in due cubi ad essi equivalenti i lati dei quali sieno pure nel rapporto di 1 a 2; per conseguenza i loro volumi saranno nel rapporto delle terze potenze di questi due numeri, saranno quindi nel rapporto di 1 ad 8.

I volumi dei corpi simili stanno sempre nello stesso rapporto delle terze potenze dei loro lati omologhi.

174. Infine *le superfici dei corpi simili stanno fra loro come i quadrati o seconde potenze dei loro lati omologhi*, perchè queste superfici sono composte di un egual numero di figure rispettivamente simili e similmente disposte, e per ciascuna coppia di tali figure simili vale il teorema indicato al N. 80.

CAPITOLO DECIMONONO.

Sfera. — È generata dalla rotazione d'un circolo. — Sezione d'una sfera. — Cilindro circoscritto alla sfera. — Rapporto fra il volume della sfera e quello del cilindro circoscritto. — Superficie della sfera paragonata a quella del cilindro ed alla superficie di un circolo massimo di essa. — Determinazione del volume d'una sfera. — Le superfici ed i volumi delle sfere non sono proporzionali ai loro diametri.

175. Uno dei corpi più notevoli e più utili fra quelli che la geometria prende in esame è la *sfera* o *palla*; è questo un corpo rotondo la cui superficie è in tutti i suoi punti egualmente conformata e che fra i corpi occupa lo stesso posto del circolo fra le figure piane; la definizione geometrica, della sfera è simile a quella del circolo:

La sfera è un corpo terminato da una superficie curva tutti i punti della quale sono egualmente distanti da un punto interno chiamato centro.

176. Imaginiamo una moneta tenuta da due perni in due punti del suo disco, diametralmente opposti l'uno all'altro, ed imprimiamo a quella moneta un velocissimo movimento rotatorio. Durante questo movimento di rotazione il disco si presenta agli occhi a guisa d'una sfera, e perciò la sfera viene spesse volte definita come il corpo che risulta dalla rotazione d'un disco intorno al proprio asse; nel nostro caso quest'asse è la linea che congiunge le estremità di ambedue i perni.

177. S'imagini che il circolo AQBQ' (fig. 130) ruoti in-

torno al diametro AB: la sua circonferenza descriverà la superficie d'una sfera perchè durante la rotazione ciascun punto della circonferenza si conserva sempre alla medesima distanza dal centro C: il centro di questa sfera coincide col centro del circolo da cui essa viene generata.

178. Se in un circolo, come ad es., in quello della fig. 130, guidiamo parecchie corde perpendicolari ad un diametro A B, tutte queste corde verranno dimezzate dal diametro (Vedi il N. 120). Considerando una qualunque di esse, p. e., la PP', vediamo tosto che nella rotazione del circolo, i punti estremi P e P' di essa descrivono un circolo il cui centro è in M, perchè questo punto è sempre ad egual distanza da P e da P'.

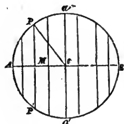


Fig. 130.

Or s'imagini tagliata la sfera con un piano il quale passi pel punto M e sia perpendicolare ad AB; la sezione di questo piano colla superficie della sfera è un circolo che ha il centro in M ed MP per raggio, cioè lo stesso circolo che vien descritto dai punti P e P' nella rotazione del circolo AQBQ'. Siccome la scelta del diametro AB è affatto arbitraria e si potrebbe egualmente generare la stessa sfera facendo ruotare il circolo AQBQ' intorno ad un altro diametro qualsiasi, così si conchiude che la sezione di una sfera con un piano è sempre un circolo.

Queste sezioni però saranno circoli di diversa grandezza; saranno tanto più grandi quanto più vicini al centro sono i piani secanti, poichè, nella rotazione del circolo AQBQ', i diversi punti della sua circonferenza descrivono circoli di diversa grandezza e tanto più grandi quanto più quei punti s'avvicinano al diametro Q Q'. La sezione che passa pel centro della sfera è il *circolo massimo* che è possibile

descrivere sulla sua superficie; qualsiasi altra sezione non passante per il centro della sfera è un *circolo minore.*

Il diametro AB (fig. 130) passa pei centri di tutte le sezioni ad esso perpendicolari, e da ciò segue che, se il diametro d'una sfera passa pei centri di più sezioni, quel diametro risulta perpendicolare a tutte queste sezioni.

179. La figura 131 ci rappresenta una sfera ed un cilindro la cui superficie tocca quella della sfera in tutti i punti della linea ADB e le cui basi, inferiore e superiore,

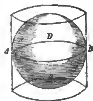


Fig. 131.

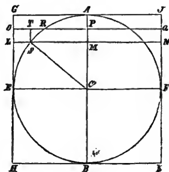


Fig. 132.

toccano la superficie della sfera, ciascuna in un sol punto: tale cilindro dicesi *circoscritto* alla sfera.

Per formarci una chiara idea della disposizione di questi due corpi consideriamo la figura 132 nella quale è disegnato un quadrato circoscritto ad un circolo. Imaginando che tutta la figura ruoti intorno al diametro AB; è chiaro che il circolo ed il quadrato descriveranno due superfici, cioè il circolo descriverà una sfera ed il quadrato un cilindro; le rette GH ed JK descriveranno la superficie curva del cilindro e le rette GJ ed HK percorreranno i due circoli che gli servono di base, ed è chiaro

che il cilindro e la sfera avranno comuni tanto i punti A e B quanto tutti i punti della circonferenza descritta dai punti E ed F; per conseguenza il cilindro sarà circoscritto alla sfera.

180. Guidiamo in questa figura le due rette LN ed OQ vicinissime l'una all'altra ed ambedue perpendicolari alla AB. Queste due rette ci rappresentano due piani perpendicolari ad AB fra i quali è compresa una porzione della sfera ed una porzione del cilindro. Questi due piani tagliano dalla superficie del cilindro una striscia che ha per altezza OL e dalla superficie della sfera una striscia la cui larghezza è RS. Siccome OL è perpendicolare ai due piani ed RS è obliquo ai medesimi, così la striscia cilindrica è più stretta della sferica. D'altra parte la striscia cilindrica è più lunga della sferica perchè quella ha per base la circonferenza di raggio LM e questa invece ha per base la circonferenza di raggio SM.

Le lunghezze di queste due striscie circolari sono nel rapporto dei raggi LM ed SM perchè (Vedi il N. 100) le circonferenze dei circoli sono nel rapporto dei loro raggi. Ora vogliamo dimostrare che RS è più grande di OL nello stesso rapporto in cui LM è più grande di SM.

A tale scopo guidiamo dapprima il raggio SC e quindi la retta ST parallela alla retta LO. Il piccolo triangolo STR ha gli angoli eguali agli angoli del triangolo SCM; poichè gli angoli in T ed M sono retti; gli angoli TSM ed RSC sono pure retti e quindi eguali fra loro, epperciò se togliamo da ambedue l'angolo MSR rimangono, residui eguali, gli angoli TSR, MSC; in conseguenza sono pure eguali i terzi angoli SRT ed SCM (Vedi il N. 47). Dunque i due triangoli SRT ed SCM sono simili, e in conseguenza il rapporto di SR ad ST è eguale al rapporto di SC ad SM. D'altra parte ST è eguale ad LO perchè queste due rette sono lati opposti d'un parallelogrammo (Vedi il N. 56);

dippiù SC è eguale ad EC perchè sono due raggi dello stesso circolo ed EC è inoltre eguale ad LM perchè lati opposti d'un parallelogrammo, sicchè LM è eguale a CS.

Ne segue adunque che SR è più grande di LO precisamente nello stesso rapporto in cui LM è più grande di SM; ma le rette SR ed LO sono le larghezze delle due striscie circolari delle due superfici sferica e cilindrica, e le rette LM ed SM sono proporzionali alle lunghezze di queste due striscie; perciò la striscia sferica è tanto più larga della striscia cilindrica quanto più grande è la lunghezza di questa in confronto della lunghezza di quella: da ciò segue che le due striscie hanno eguale superficie.

Ora guidando molte rette perpendicolari ad AB e vicinissime l'una all'altra, come LN ed OQ, veniamo a dividere la superficie della sfera e quella del cilindro in un egual numero di striscie molto sottili a due a due eguali fra loro; epperciò ne dobbiamo concludere il seguente notevolissimo teorema:

182. *La superficie d'una sfera è eguale alla superficie curva del cilindro ad essa circoscritto.*

182. Trovammo al N. 168 che la superficie curva del cilindro è eguale a quella d'un rettangolo che abbia per altezza l'altezza del cilindro e per base la circonferenza del circolo che serve di base al cilindro. Nel caso di cui si tratta l'altezza del cilindro è eguale al diametro della sfera inscritta e la sua base è eguale ad un circolo massimo (Vedi il N. 178) di quella sfera. La superficie curva del cilindro è perciò eguale al rettangolo avente per altezza il diametro e per base la circonferenza del circolo massimo della sfera inscritta, ossia, ciò che è lo stesso, al doppio rettangolo del raggio e della circonferenza d'un circolo massimo della sfera inscritta.

Ma dal N. 109 si ricava che il rettangolo del raggio e della circonferenza d'un circolo è eguale al doppio della

superficie del circolo; cosichè la superficie curva del cilindro riesce eguale al quadruplo della superficie di un circolo massimo della sfera inscritta.

Siccome poi (Vedi il N. 181) la superficie curva del cilindro è eguale alla superficie della sfera inscritta, così ne concludiamo il seguente teorema:

183. *La superficie d'una sfera è eguale al quadruplo della superficie d'un suo circolo massimo.*

Questo teorema ci pone in grado di calcolare la superficie d'una sfera di cui conosciamo il diametro. Dapprima si determinerà la superficie d'un suo circolo massimo in base alla regola del N. 110, cioè formando il quadrato del diametro, dividendolo per 14 e moltiplicando per 11 il risultante quoziente: la superficie così ottenuta moltiplicata per 4 darà la richiesta superficie della sfera.

Per farne un esempio calcoliamo la superficie della Terra. Il suo diametro medio è di 12732 chilometri; il quadrato di questo numero è 162,103,824 che diviso per 14 dà 11,578,845 e questo quoziente moltiplicato per 11 produce 127,367,295 che è il numero di chilometri quadrati contenuti in un circolo massimo della Terra: il quadruplo di tal numero, cioè 509,469,180 chilometri quadrati, è la richiesta superficie della Terra.

184. Siccome in questo calcolo si divide il quadrato del diametro per 14 e poi si moltiplica per 11 e per 4, ossia per 44, così è chiaro che l'operazione si potrà semplificare prendendo la metà di 14 e di 44 e *dividendo il quadrato del diametro per* 7 *e poi moltiplicandolo per* 22, poichè è manifesto che in tal modo si otterrà lo stesso risultato. Si vede che questa regola per la determinazione della superficie d'una sfera presenta una notevole somiglianza colla regola già indicata per il calcolo della circonferenza d'un circolo, queste due regole diferiscono soltanto in ciò, che nell'una comparisce semplicemente il

diametro e nell' altra il quadrato del diametro; ma su questa circostanza non possiamo entrare in maggiori particolari.

185. Ora sarà facile l'assegnare una regola generale per calcolare il volume d'una sfera di cui si conosce il raggio. Quando abbiamo cercato somigliante regola per la superficie d'un circolo (Vedi il N. 109), abbiamo imaginata la circonferenza di esso divisa in moltissimi archetti ed abbiamo guidati i raggi pei punti estremi di ciascun archetto per modo da costruire su ciascuno di essi un triangolo. In somigliante modo imagineremo ora divisa la superficie della sfera in moltissime parti assai piccole sicchè in ciascuna di esse non sia più sensibile la curvatura e si possano perciò considerare come tante piccolissime figure piane; poscia guideremo altrettanti raggi ai vertici di queste piccolissime figure; la sfera risulterà adunque divisa in grandissimo numero di piccole piramidi che avranno il vertice comune nel centro della sfera e per basi le piccole porzioni della superficie. Ora il volume d' una piramide (Vedi il N. 164) è eguale al terzo del prodotto della base per l' altezza. Dunque per trovare il volume della sfera bisognerebbe fare questo calcolo per ciascuna delle piramidi che la compongono e poi sommare insieme i volumi di tutte. Ma quest'operazione si può semplificare formando dapprima la somma delle basi di tutte le piramidi, cioè la superficie della sfera, moltiplicando questa superficie per l'altezza comune di tutte le piramidi, cioè pel raggio della sfera, e poi dividendo per 3 il prodotto così ottenuto. Sappiamo però che la superficie d'una sfera è eguale al quadruplo della superficie d' un suo circolo massimo; possiamo quindi stabilire la seguente regola: *Si ottiene il volume d'una sfera moltiplicando il quadruplo della superficie d'un suo circolo massimo per il raggio e dividendone il prodotto per tre.*

Da questa regola se ne può ricavare un'altra più semplice. Al N. 184 abbiamo trovato che la superficie d' una sfera si ottiene dividendo per 7 il quadrato del diametro e moltiplicando il quoziente per 22; ora bisognerebbe moltiplicare il numero così ottenuto per la metà del diametro e dividere per 3 il prodotto o, ciò che è lo stesso, moltiplicare per l'intero diametro e dividere il prodotto per 6. L'operazione che convien fare per determinare il volume d'una sfera è dunque la seguente: bisogna moltiplicare il quadrato del diametro per il diametro stesso e per il numero 22 e dividere il prodotto pei numeri 7 e 6. Il quadrato del diametro moltiplicato per lo stesso diametro produce la terza potenza o il cubo del diametro; dunque bisogna moltiplicare il cubo del diametro per 22 e dividere il prodotto per 6 volte 7 cioè per 42, ossia ciò che è lo stesso, moltiplicare per 11 e dividere per 21. *Dunque per calcolare il volume d'una sfera si moltiplicherà il cubo del diametro per 11 e si dividerà per 21.*

186. È manifesto che tutte le sfere sono corpi simili fra loro; perciò si potrà applicare alle sfere quanto abbiam detto pei corpi simili in generale; possiam quindi stabilire che le superfici delle sfere stanno fra loro come i quadrati *(seconde potenze)* dei diametri e che i volumi delle sfere stanno fra loro come i cubi *(terze potenze)* dei diametri.

CAPITOLO VENTESIMO.

Asse e poli d' un circolo massimo della sfera. — Come la sfera venga divisa da un suo circolo massimo e come due circoli massimi si taglino scambievolmente. — Inclinazione dei piani di due circoli massimi della medesima sfera. — Essa può venir misurata in tre diverse maniere. — Circoli massimi passanti per i poli d'un altro circolo massimo.

187. Imaginiamo condotto un piano pel centro C d'una sfera (fig. 133): la sezione di questo piano colla superficie della sfera sarà un circolo massimo AB. La retta DE perpendicolare al piano di questo circolo massimo, che passa pel centro C e che perciò è un diametro della sfera si chiama *asse* del circolo massimo AB, ed i punti D ed E in cui l'asse incontra la superficie della sfera diconsi i *poli* di questo circolo. Perciò l'asse d'un circolo massimo passa sempre pel centro della sfera; ogni circolo massimo ha due poli e ciascun polo è distante 90° da tutti i punti della periferia del corrispondente circolo massimo.

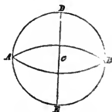


Fig. 133.

188. È per sè manifesto che ogni circolo massimo divide la sfera in due parti eguali. Nei punti di mezzo delle superfici curve di questi due *emisferi* si trovano i poli del circolo massimo considerato.

189. Siccome tutti i circoli massimi hanno il loro centro nel centro della sfera, così due circoli massimi devono tagliarsi secondo una linea retta passante pel centro della

sfera, cioè secondo un diametro di essa. Questa retta però è in pari tempo un diametro comune ai due circoli massimi i quali, come tutti i circoli massimi d'una medesima sfera, hanno eguale circonferenza. Dunque due circoli massimi d'una sfera si tagliano sempre lungo un medesimo diametro, comune ad entrambi; ossia, in altri termini, due circoli massimi d'una sfera si tagliano scambievolmente a metà.

Sieno, p. e. (fig. 134) AB e DE due circoli massimi della sfera ADBE: i loro piani si segano lungo il diametro FG comune ad entrambi i circoli, il quale è pure un diametro della sfera perchè passa pel centro C di essa, e le porzioni dei due circoli determinate da questo taglio cioè AFG, FGB, DFG ed FGE sono tutte eguali alla semi-circonferenza di uno stesso circolo epperciò eguali fra loro.

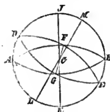


Fig. 134.

190. L'angolo, secondo cui si tagliano i piani dei due circoli massimi, cioè l'angolo di *inclinazione* di questi due piani, è eguale manifestamente all'angolo AGD o, ciò che torna lo stesso, all'angolo DFA, *secondo il quale si tagliano le periferie dei due circoli nei loro punti d'incontro* G ed F.

191. L'angolo JCM formato dagli assi JK ed LM dei due circoli massimi è eguale all'angolo di inclinazione di questi.

Di ciò si potrà facilmente persuadersi osservando dapprima che se i due circoli coincidono, cioè se la loro inclinazione si riduce a niente, anche i due assi coincidono e quindi anche l'angolo di questi è eguale a zero. Dippiù, crescendo l'angolo dei due assi, cresce pure nella stessa misura l'angolo dei piani dei due circoli massimi.

Ma l'angolo formato dai due assi è un angolo al centro nel circolo massimo AJMBKL; quest'angolo è perciò misu-

rato dall'arco JM o, ciò che torna lo stesso, dall'arco LK. D'altra parte i punti J, K, M, L sono i poli dei due circoli massimi AB e DE. Dunque *l'inclinazione di due circoli massimi d'una sfera è pur misurata dagli archi* JM *od* LK *del circolo massimo passante pei poli di quei due circoli.*

192. Dal N. 187 risulta che l' arco AJ e l' arco DM misurano, si l'uno come l'altro, 90°; se da ciascuno di questi due archi togliamo l'arco DJ otteniamo gli archi JM ed AD che dovranno pur essere fra loro eguali. L'inclinazione dei piani di due circoli massimi d'una sfera è dunque misurata eziandio dall'arco AD del circolo massimo AJMBKL, passante pei loro poli, che è compreso fra quei due circoli massimi.

193. Aumentando gradatamente l'inclinazione del piano del circolo massimo DE sul piano del circolo massimo AB, aumenterà in conseguenza anche l'arco JM compreso fra i loro poli, il quale (Vedi il N. 191) misura questa inclinazione, e se il circolo DE passerà per l' asse JK cioè pei due poli J e K del circolo AB, è chiaro che l'asse LM del circolo DE giacerà nel piano del circolo AB. L'arco compreso fra i poli dei due circoli massimi cioè (Vedi il N. 191) l'inclinazione dei piani di questi due circoli è allora eguale all' arco MC o all' arco JB, vale a dire (Vedi il N. 187) essa eguaglia 90°: in altri termini i due piani sono fra loro perpendicolari.

Dunque se un circolo massimo d'una sfera passa pei poli d'un altro circolo massimo della sfera medesima, i piani di questi due circoli sono fra loro perpendicolari.

194. Da ciò risulta manifestamente anche il teorema reciproco, cioè: Se i piani di due circoli massimi d'una sfera sono fra loro perpendicolari, uno di essi passa per i poli dell'altro.

FINE.

INDICE



